باب 2

مکمل اعداد

(Whole Numbers)

2.1 تعارف (Introduction)

جیسا کہ ہم جانتے ہیں کہ جب ہم گننا شروع کرتے ہیں تو ہم 1،2،3،4، ... کا استعمال کرتے ہیں۔ گننا شروع کرتے ہی یہ فطری طور پر دماغ میں آجاتے ہیں۔ اس لیے ریاضی داں ان گننے والے اعداد کو طبعی یا فطری اعداد (Natural Numbers) کہتے ہیں۔

پیش رو اور جانشین (Predecessor and successor)

کسی بھی طبعی عدد میں ایک جمع کرنے پر ہمیں اگلا عدد حاصل ہوتا ہے۔ یعنی آپ کو اس عدد کا جانشین مل جاتا ہے۔

16 کا جانشین $16 + 1 = 17$ ہے۔ اور 19 کا جانشین $19 + 1 = 20$ ہے۔ اور اسی طرح آگے بھی۔

عدد 16، عدد 17 سے پہلے آتا ہے۔ ہم کہہ سکتے ہیں کہ 17 کا پیش رو ہے۔ $17 - 1 = 16$

20 کا پیش رو ہے $20 - 1 = 19$ اور اسی طرح آگے بھی ہے۔

عدد 3 کا ایک پیش رو ہے اور ایک جانشین بھی۔ 2 کے بارے میں کیا خیال ہے؟ اس کا جانشین 3 اور پیش رو 1 ہے۔ کیا عدد 1 کا جانشین اور پیش رو دونوں ہیں؟

کوشش کیجیے

1۔ درج ذیل اعداد کے پیش رو اور جانشین لکھیے :

19; 1,997; 12,000; 49; 1,00,000;

2۔ کیا کوئی ایسا طبعی عدد ہے جس کا کوئی پیش رو نہیں ہے؟

3۔ کیا کوئی ایسا طبعی عدد ہے جس کا کوئی جانشین نہیں ہے؟ کیا کوئی آخری طبعی عدد ہے؟

ہم اپنے اسکول میں بچوں کی تعداد گن سکتے ہیں۔ کسی شہر میں لوگوں کی تعداد گنی جا سکتی ہے۔ ہم ہندوستان کے لوگوں کی تعداد بھی گن سکتے ہیں۔ پوری دنیا کے لوگوں کی تعداد کو بھی گنا جا سکتا ہے۔ یوں تو ہم آسمان کے تاروں کو نہیں گن پاتے اور نہ ہی ہم اپنے سر کے بالوں کو۔ لیکن اگر ہم کسی طرح ان کو گن سکیں تو اس کے لیے بھی کوئی نہ کوئی عدد موجود ہوگا۔ پھر ہم اس عدد میں 1 جوڑ کر اس سے بڑا عدد حاصل کر سکتے ہیں اور اسی طرح ہم انسانوں کے بالوں کی کل تعداد کو بھی لکھ سکتے ہیں۔

یہ تو اب صاف ظاہر ہے کہ کوئی بھی عدد سب سے بڑا نہیں ہوتا۔ طبعی اعداد کے بارے میں ان سوالوں کے علاوہ اور بھی ایسے ہی بہت سے سوال ہمارے دماغ میں آسکتے ہیں۔ کچھ اسی طرح کے سوالوں کے بارے میں سوچیے اور اپنے دوستوں سے اس بارے میں بات کیجیے، ہوسکتا ہے آپ ایسے بہت سارے سوالوں کے جواب نہیں جانتے ہوں۔

2.2 مکمل اعداد (Whole Numbers)

ہم نے دیکھا کہ طبعی اعداد میں عدد 1 کا کوئی پیش رو نہیں ہے۔ طبعی اعداد کے مجموعہ میں 0 کو عدد 1 کے پیش رو کے طور پر شامل کر دیتے ہیں۔

طبعی اعداد کے ساتھ صفر (0) ملانے پر ہمیں مکمل اعداد کا مجموعہ حاصل ہوتا ہے۔

آپ اپنی پچھلی کلاسوں میں اعداد کے تمام بنیادی عمل پڑھ چکے ہیں یعنی جمع، گھٹا، ضرب اور تقسیم۔ آپ یہ بھی جانتے ہیں کہ سوالوں میں ان کا استعمال کیسے کرتے ہیں۔ آگے بڑھنے سے پہلے ہم دیکھیں گے کہ عددی خط ہوتا کیا ہے؟

کوشش کیجیے

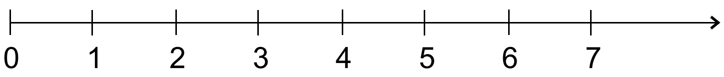
1۔ کیا تمام طبعی اعداد مکمل اعداد بھی ہوتے ہیں؟
2۔ کیا تمام مکمل اعداد طبعی اعداد بھی ہوتے ہیں؟
3۔ سب سے بڑا مکمل عدد کون سا ہے؟

2.3 عددی خط (The Number Line)

ایک خط بنائیے۔ اس پر ایک نقطہ لگائیے اور اس کا نام 0 رکھیے۔ 0 کے داہنی طرف ایک اور نقطہ لگائیے اور اس کا نام 1 رکھیے۔

ان دونوں نقطوں یعنی 0 اور 1 کے درمیان کے فاصلہ کو 'اکائی فاصلہ' کہتے ہیں۔اسی خط پر 1 کے داہنی طرف اکائی فاصلہ پر ایک اور نقطہ لگائیے۔اس کا نام 2 رکھیے اور اسی طرح ایک ایک اکائی کے فاصلہ پر اور دوسرے نقطے لگائیے اور ان کا نام 3، 4، 5 . . . رکھیے ۔ آپ داہنی طرف کسی بھی مکمل عدد تک جا سکتے ہیں۔

مندرجہ ذیل خط مکمل اعداد کے لیے ایک عددی خط ہے۔



نقطہ 2 اور 4 کے درمیان کتنا فاصلہ ہے؟ یقیناً یہ دو اکائیاں ہیں۔ کیا آپ نقطہ 2 اور 6 کے درمیان کا فاصلہ بتا سکتے ہیں۔ اور نقطہ 2 اور 7 کے درمیان کا بھی؟

عددی خط پر آپ دیکھتے ہیں کہ عدد 7، عدد 4 کے داہنی طرف ہے۔ یہ عدد 7، عدد 4 سے بڑا ہے۔ یعنی $7 > 4$؛ عدد 8، عدد 6 کے دائیں طرف ہے اور $8 > 6$۔ یہ جاننے سے ہمیں یہ مدد ملتی ہے کہ دیے گئے دو مکمل اعداد میں سے جو عدد دائیں طرف ہوگا وہی بڑا ہوگا۔ ہم یہ بھی کہہ سکتے ہیں کہ عددی خط پر جو عدد دوسرے عدد کے بائیں طرف ہوگا وہ چھوٹا ہوگا۔

مثال کے طور پر $4 < 9$ کیونکہ عدد 4 عدد 9 کے بائیں طرف ہے۔ اسی طرح $12 > 5$، کیونکہ عدد 12 عدد 5 کے دائیں طرف ہے۔

10 اور 20 کے بارے میں آپ کیا کہیں گے؟

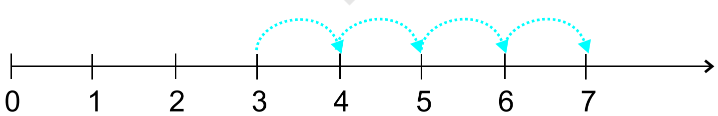
عددی خط پر 30، 12، اور 18 کے نشانات لگائیے کون سا عدد سب سے زیادہ بائیں طرف ہے؟

کیا آپ 1005 اور 9756 میں سے بتا سکتے ہیں کہ کون سا عدد دوسرے عدد کے مقابلے میں دائیں طرف ہوگا۔

ایک عددی خط بنائیے اور اس پر 12 کے جانشین اور 7 کے پیش رو کو ظاہر کیجیے؟

عددی خط پر جمع (Addition on the Number Line)

مکمل اعداد کی جمع کو عددی خط پر ظاہر کیا جاسکتا ہے۔ آیئے ہم 3 اور 4 کی جمع دیکھتے ہیں۔



تیر کی شروعات 3 کے نشان پر ہے۔ 3 سے شروع کیجیے۔ چونکہ ہم کو اس عدد میں 4 کو جمع کرنا ہے۔ اس لیے ہم دائیں طرف 4 قدم چلیں گے۔

کوشش کیجیے

عددی خط کا استعمال کرتے ہوئے $4 + 5$، $2 + 6$، $3 + 5$ اور $1 + 6$ معلوم کیجیے؟

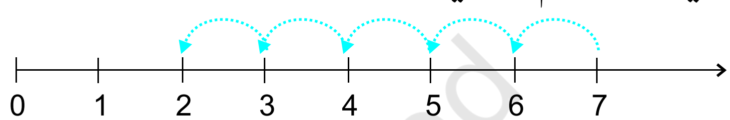
3 سے 4 پر، 4 سے 5 پر، 5 سے 6 پر اور 6 سے 7 پر جیسا کہ اوپر دکھایا گیا ہے۔ آخری تیر کی نوک چوتھے قدم کے بعد 7 کے نشان پر ہے۔

3 اور 4 کا حاصل جمع 7 ہے یعنی $3 + 4 = 7$

عددی خط پر تفریق (Subtraction on the Number Line)

دو مکمل اعداد کی گھٹا کو بھی عددی خط پر دکھایا جاسکتا ہے۔

آیئے $7 - 5$ معلوم کرتے ہیں:



7 سے شروع کیجیے۔ کیونکہ 5 کو گھٹانا ہے۔ اس لیے ایک اکائی کا ایک قدم لیتے ہوئے بائیں طرف چلیے اس طرح پانچ قدم چلیے۔ ہم 2 کے نشان پر پہنچیں گے یعنی $7 - 5 = 2$

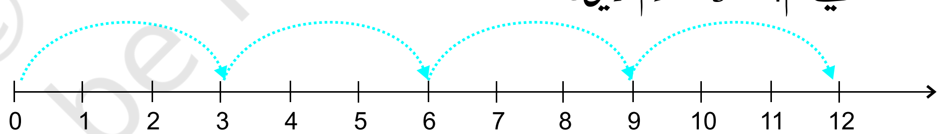
کوشش کیجیے

عددی خط کا استعمال کرتے ہوئے $8 - 3$، $6 - 2$ اور $9 - 6$ معلوم کیجیے۔

عددی خط پر ضرب (Multiplication on the Number Line)

اب ہم عددی خط پر مکمل اعداد کی ضرب دیکھتے ہیں۔

آیئے ہم 3×4 معلوم کریں۔



0 سے شروع کیجیے۔ 3 اکائیوں کا ایک ساتھ قدم لیتے ہوئے دائیں طرف 4 بار چلیے۔ آپ کہاں پہنچے۔ آپ 12 پر پہنچیں گے۔ اس لیے ہم کہہ سکتے ہیں کہ $3 \times 4 = 12$

کوشش کیجیے

عددی خط کا استعمال کرتے ہوئے 3×3؛ 6×2 اور 4×2 معلوم کیجیے۔

مشق: 2.1

1۔ 10999 کے اگلے تین طبعی اعداد لکھیے۔

2۔ 10001 کے پیش رو تین مکمل اعداد لکھیے۔

3۔ سب سے چھوٹا مکمل عدد کون سا ہے؟

4۔ 32 اور 53 کے درمیان کتنے مکمل اعداد ہیں؟

5۔ ہر ایک کا جانشین لکھیے

(a) 2440701 (b) 100199 (c) 1099999 (d) 2345670

6۔ ہر ایک کا پیش رو لکھیے

(a) 94 (b) 10000 (c) 208090 (d) 7654321

7۔ مندرجہ ذیل عددی جوڑوں میں کون سا عدد، عددی خط پر، دوسرے عدد کے بائیں طرف واقع ہے۔ دونوں اعداد کے درمیان مناسب علامت (<,>) لگا کر بھی لکھیے

(a) 530,503 (b) 370,307 (c) 98765,56789 (d) 9830415,10023001

8۔ مندرجہ ذیل میں ہر ایک بیان کے سامنے درست (T) یا غلط (F) لکھیے ۔

(a) صفر سب سے چھوٹا طبعی عدد ہے۔

(b) عدد 399 کا پیش رو 400 ہے۔

(c) صفر سب سے چھوٹا مکمل عدد ہے۔

(d) عدد 599 کا جانشین 600 ہے۔

(e) تمام طبعی اعداد، مکمل اعداد ہوتے ہیں۔

(f) تمام مکمّل اعداد طبعی اعداد ہوتے ہیں۔

(g) کسی دو ہندسی عدد کا پیش رو ایک ہندسی نہیں ہوسکتا ہے۔

(h) سب سے چھوٹا مکمّل عدد ایک ہے۔

(i) طبعی عدد 1 کا کوئی پیش رو نہیں ہے۔

(j) مکمل عدد 1 کا کوئی پیش رو نہیں۔

(k) 11 اور 12 کے درمیان مکمل عدد 13 واقع ہے۔

(l) مکمل عدد 0 کا کوئی پیش رو نہیں ہے۔

(m) کسی دو ہندسی عدد کا جانشین ہمیشہ دو ہندسی عدد ہوتا ہے۔

2.4 مکمل اعداد کی خصوصیات (Properties of Whole Numbers)

جب ہم اعداد کی مختلف عملوں پر قریبی نظر ڈالتے ہیں تو ہم مکمّل اعداد میں بہت سی خصوصیات پاتے ہیں۔ یہ خصوصیات اعداد کو بہتر طریقہ سے سمجھنے میں مددگار ہوتی ہیں۔ اِس کے علاوہ بعض عملوں میں کی جانے والی تحسیب بھی آسان ہوجاتی ہے۔

اسے کیجیے

آیئے کلاس میں سے ہر بچہ کوئی دو مکمل اعداد لے اور اُن کو جوڑے۔ کیا جواب ہمیشہ ایک مکمّل عدد ہی ہوگا؟

آپ کی جمع کچھ اس طرح ہوگی :

8	+	7	=	15، ایک مکمل عدد ہے۔
5	+	5	=	10، ایک مکمل عدد ہے۔
15	+	0	=	15، ایک مکمل عدد ہے۔
.	+	.	=	. . .
.	+	.	=	. . .

ایسے پانچ اور جوڑوں کے ساتھ کوشش کیجئے۔ کیا حاصل جمع ہمیشہ ایک مکمل عدد ہی ہے؟

کیا آپ ایک ایسا مکمل اعداد کا جوڑا بنا سکتے ہیں، جس کا جوڑ مکمل عدد نہ ہو؟ ایسے مکمل اعداد حاصل کرنا ناممکن ہے جن کا حاصل جمع مکمل عدد نہ ہو۔ ہم کہہ سکتے ہیں کہ کسی دو مکمل اعداد کو جوڑنے سے مکمل عدد ہی حاصل ہوتا ہے۔ یعنی جمع کے تحت مکمل اعداد کا مجموعہ بندشی یا محصوری ہوتا ہے۔ اس خاصیت کو مکمّل اعداد کی جمع کی بندشی یا محصوری خاصیت (Closure Property) کہتے ہیں۔

کیا مکمّل اعداد، ضرب کے تحت بھی بندشی یا محصوری ہوتے ہیں۔ آپ اس کو کیسے جانچیں گے؟

آپ کی ضرب کچھ اس طرح ہوگی:

8	×	7	=	56، ایک مکمل عدد ہے۔
5	×	5	=	25، ایک مکمل عدد ہے۔
15	×	0	=	0، ایک مکمل عدد ہے۔
.	×	.	=	. . .
.	×	.	=	. . .

دو مکمل اعداد کی ضرب سے موصول حاصل ضرب بھی ایک مکمّل عدد ہوتا ہے۔ ہم کہہ سکتے ہیں کہ ضرب کے تحت بھی مکمّل اعداد کا نظام بندشی یا محصوری ہے۔

بندشی خاصیت (Closure Property): مکمل اعداد جمع اور ضرب دونوں نظامِ عمل کے تحت بندشی ہوتے ہیں۔

6	–	2	=	4، ایک مکمل عدد ہے۔
7	–	8	=	?، ایک مکمل نہیں عدد ہے۔
5	–	4	=	1، ایک مکمل عدد ہے۔
3	–	9	=	?،ایک مکمل عدد نہیں ہے۔

سوچیے، بحث کیجیے اور لکھیے

1۔ مکمل اعداد تفریق کے تحت بندشی نہیں ہیں۔ کیوں؟ آپ تفریق کچھ اِس طرح کریں گے۔

آپ خود سے کچھ اور مثالیں لیجیے اور اِن کی جانچ کیجیے۔

2۔ کیا مکمل اعداد تقسیم کے تحت بندشی ہیں یا نہیں؟ اس جدول کا مشاہدہ کیجیے۔

8	÷	4	=	2، ایک مکمل عدد ہے۔
5	÷	7	=	$\frac{5}{7}$ ایک مکمل نہیں عدد ہے۔
12	÷	3	=	4 ایک مکمل عدد ہے۔
6	÷	5	=	$\frac{6}{5}$ ایک مکمل عدد نہیں ہے۔

آپ خود کچھ اور مثالیں بنائیے اور ان کی جانچ کیجیے۔

صفر سے تقسیم (Division by Zero)

کسی عدد سے تقسیم کرنے کا مطلب اُس عدد کو بار بار گھٹانا ہے۔

آیئے ذرا 2÷8 معلوم کرتے ہیں:

$$\begin{array}{rl} 8 & \\ -\ 2 & \text{........ 1} \\ \hline 6 & \\ -\ 2 & \text{........ 2} \\ \hline 4 & \\ -\ 2 & \text{........ 3} \\ \hline 2 & \\ -\ 2 & \text{........ 4} \\ \hline 0 & \end{array}$$

8 میں سے 2 کو بار بار گھٹایئے۔

اس عمل کو کتنی بار دہرانے پر ہم صفر پر پہنچے؟ چار بار۔

اس لیے ہم لکھتے ہیں $8 \div 2 = 4$

اس عمل کا استعمال کرتے ہوئے $8 \div 24$ اور $4 \div 16$ معلوم کیجیے۔

آیئے اب ہم $2 \div 0$ معلوم کریں۔

	2	
–	0	 1
	2	
–	0	 2
	2	
–	0	 3
	2	
–	0	 4
	2	
	⋮	⋮

ہر بار عمل کو دہرانے پر ہمیں 2 ہی ملتا ہے! کیا یہ سلسلہ کہیں رُکے گا؟ نہیں

ہم کہہ سکتے ہیں کہ $2 \div 0$ بے معنی عمل ہے

$7 \div 0$ معلوم کرنے کی کوشش کیجیے۔

	7	
–	0	 1
	7	
–	0	 2
	7	
–	0	 3
	7	
	⋮	⋮

اس حالت میں بھی ہم کو گھٹانے کے عمل میں کبھی 0 حاصل نہیں ہوگا۔

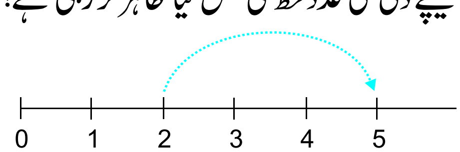
ہم کہہ سکتے ہیں $7 \div 0$ ایک بے معنی عمل ہے۔

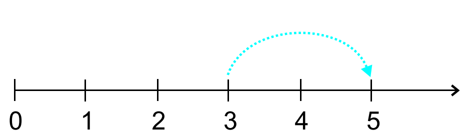
اس کی بھی جانچ کیجیے۔

"کسی مکمل عدد کو 0 سے تقسیم کرنا ایک بے معنی عمل ہے"۔

جمع اور ضرب کی تقلیت (Commutativity of Addition and Multiplication)

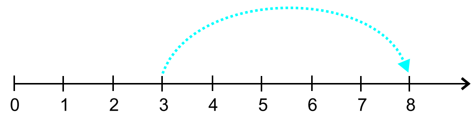
نیچے دی گئی عدد خط کی شکل کیا ظاہر کر رہی ہے؟

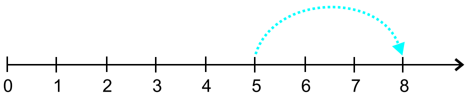




دونوں مرتبہ ہم 5 پر پہنچتے ہیں۔ اس لئے $2 + 3$ اور $3 + 2$ ایک ہی ہیں۔

اسی طرح $3 + 5$ اور $5 + 3$ ایک ہی ہیں۔





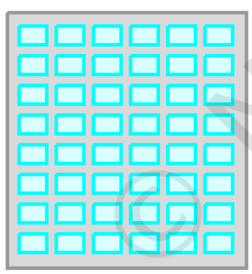
4 + 6 اور 6 + 4 کے لئے بھی کوشش کریں۔

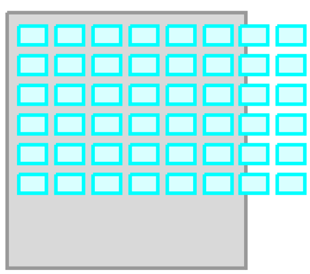
آپ کو ایسا کوئی بھی مکمل اعداد کا جوڑا نہیں حاصل ہوگا جس کو دو مختلف ترتیب میں جمع کریں تو حاصل جمع مختلف ہو۔

آپ دو مکمّل اعداد کو کسی بھی ترتیب میں جمع کر سکتے ہیں۔

ہم کہیں گے کہ مکمّل اعداد کی جمع تقلیبی (Commutative) ہے۔ اِس خاصیت کو جمع کا تقلیبی کلیّہ کے نام سے جانا جاتا ہے۔

اس پر اپنے دوستوں سے بحث کیجئے





آپ کے گھر میں کوئی چھوٹی سی تقریب ہے۔ آپ مہمانوں کے لیے 8 کرسیوں کی 6 قطاریں ترتیب دینا چاہتے ہیں۔ اِس کے لیے آپ کو کل 8 × 6 کرسیاں چاہئیں۔ مگر آپ کا کمرہ اتنا چوڑا نہیں ہے کہ اِس میں 8 کرسیوں کی 6 قطاریں بن سکیں تو آپ نے طے کیا کہ ہم 6 کرسیوں کی 8 قطاریں بنالیں۔ اب آپ کو کتنی کرسیاں چاہیے ہوں گی؟ کیا اب آپ کو زیادہ کُرسیاں چاہیے؟ کیا ضرب کا بھی تقلیبی کلّیہ ہوتا ہے۔

4 اور 5 کو مختلف ترتیب میں ضرب کیجیے ۔

آپ دیکھیں گے کہ 4 × 5 = 5 × 4

کیا یہ 3 اور 6، 5 اور 7 اعداد کے لئے بھی ٹھیک ہے؟

آپ دو مکمّل اعداد کو کسی بھی ترتیب میں ضرب کر سکتے ہیں۔

ہم کہیں گے کہ مکمل اعداد کی ضرب **تقلیبی** ہوتی ہیں۔

اِس طرح مکمّل اعداد کی جمع اور ضرب دونوں تقلیبی هوتی هیں.

درج ذیل کو جانچیے :

(i) مکمّل اعداد تفریق کے تحت تقلیبی نہیں ہوتے ہیں اِس کو جانچ کرنے کے لیے کم از کم تین عددی جوڑے لیجیے۔

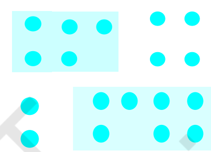
(ii) کیا $(6 \div 3)$ اور $(3 \div 6)$ ایک سے ہیں؟
اِس کو ثابت کرنے کے لئے مکمّل اعداد کے کچھ اور جوڑے لیجیے۔

جمع اورضرب کی خاصیت (Associativity of Addition and Multiplication)

درج ذیل شکل کا مشاہدہ کیجیے :

(a) $(2 + 3) + 4 = 5 + 4 = 9$

(b) $2 + (3 + 4) = 2 + 7 = 9$



اوپر شکل (a) میں ہم پہلے 2 اور 3 کو جمع کر سکتے ہیں اور پھر اس حاصل جمع میں 4 کو جمع کرتے ہیں۔ اور (b) میں آپ پہلے 3 اور 4 کو جمع کر سکتے ہیں اور پھر اِس حاصل جمع میں 2 کو جمع کر سکتے ہیں۔

کیا جواب ایک سا نہیں ہے؟

اس پر بھی غور کریں:

$(5 + 7) + 3 = 12 + 3 = 15$ اور $5 + (7 + 3) = 5 + 10 = 15$

اِس لئے، $(5 + 7) + 3 = 5 + (7 + 3)$

یہ مکمل اعداد کی جمع کے تحت تلازمی خاصیت ہے۔

اِس کو اعداد 2، 8 اور 6 کے لئے جانچیے۔

غور کیجئے گا کہ ہم اعداد کا گروپ اس طرح بنائیں کہ ہم کو جمع کرنے میں آسانی ہو۔

مثال نمبر 1: اعداد 234، 197 اور 103 کو جوڑیے۔

حل : $234 + 197 + 103 \quad = \quad 234 + (197 + 103)$

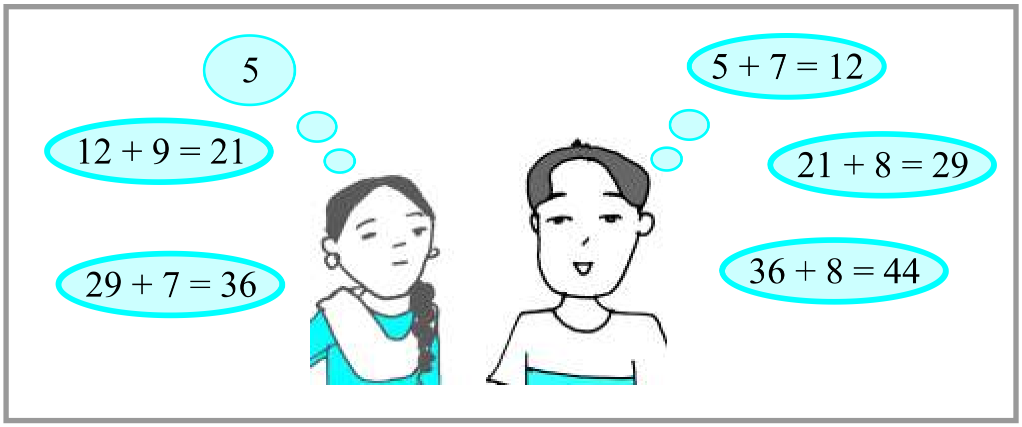
$= 234 + 300 = 534$

یہ کھیل کھیلیے

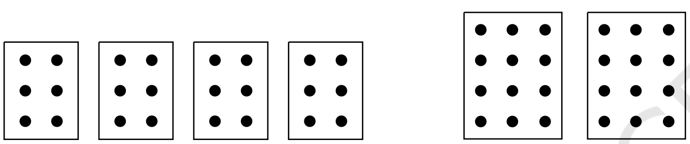
آپ اور آپ کا دوست اِس کھیل کو کھیل سکتے ہیں۔

آپ 1 سے 10 تک کا کوئی عدد بولیے۔ آپ کا دوست اب اِس عدد میں 1 سے 10 تک کا کوئی عدد جمع کریں اور حاصل جمع بتائیں۔ اب آپ کی باری ہے۔ آپ اس حاصل جمع میں 1 سے 10 تک کا کوئی عدد

جمع کریں اور حاصل جمع بتائیں اب آپ دونوں باری باری سے یہی کھیل دہرائیں گے جو پہلے 100 پر پہنچے گا وہی جیتے گا۔ اگر آپ ہمیشہ جیتنا چاہتے ہیں تو آپ کا منصوبہ (پلان) کیا ہونا چاہیے۔



درج ذیل شکل 2.1 میں ضرب کی کچھ حقیقتیں (facts) دکھائی گئیں ہیں۔ اُن کا مشاہدہ کیجیے۔



(a) (b)

شکل (a) 2.1 اور شکل 2.1(b) میں نقطوں کی تعداد کو گنیے۔ آپ کو کیا ملا؟ نقطوں کی تعداد برابر ہے۔ شکل 2.1(a) میں ہمارے پاس ہر باکس میں 3×2 نقطے ہیں۔ اس لیے نقطوں کی کل تعداد $24 = 4 \times (3 \times 2)$ ہے۔

شکل 2.1(b) کے ہر باکس میں 4×3 نقطے ہیں تو نقطوں کی کل تعداد $24 = (4 \times 3) \times 2$ ہے۔ اس طرح $(4 \times 3) \times 2 = 4 \times (3 \times 2)$۔ اسی طرح آپ دیکھ سکتے ہیں: $(4 \times 5) \times 3 = 4 \times (5 \times 3)$

یہی عمل $2 \times (6 \times 5)$ اور $(2 \times 6) \times 5$ اور $4 \times (6 \times 3)$ اور $(4 \times 6) \times 3$ کے لیے کیجیے۔

یہ مکمل اعداد کے لیے ضرب کی تلازمی خاصیت ہے۔

سوچیے اور معلوم کیجیے :

ان میں کون سا آسان ہے اور کیوں؟

(a) $6 \times (5 \times 3)$ یا $(6 \times 5) \times 3$

(b) $9 \times (4 \times 25)$ یا $(9 \times 4) \times 25$

مثال نمبر 2: $14 + 17 + 6$ کو دو طریقوں سے معلوم کیجیے۔

حل : $(14 + 17) + 6 = 31 + 6 = 37$

$14 + 17 + 6 = 14 + 6 + 17 = (14 + 6) + 17 = 20 + 17 = 37$

یہاں آپ نے جمع کے لیے تلازمی اور تقلیبی خصوصیات دونوں کو ملا کر استعمال کیا ہے۔
کیا آپ سمجھتے ہیں کہ تلازمی اور تقلیبی خاصیت نے عمل کو آسان بنا دیا ہے۔؟

کوشش کیجیے

معلوم کیجیے: $7 + 18 + 13; 16 + 12 + 4$

درج ذیل قسم کے سوالات کے لیے ضرب کی تلازمی خاصیت بہت کارگر ہوتی ہے۔

مثال نمبر 3: 12×35 معلوم کیجیے۔

حل: $12 \times 35 = (6 \times 2) \times 35 = 6 \times (2 \times 35) = 6 \times 70 = 420$

اوپر کی مثال میں ہم نے سب سے چھوٹے جُفت عدد کو 5 کے ضعف سے ضرب کر کے تلازمی خاصیت کا استعمال کیا۔

مثال نمبر 4: $8 \times 1769 \times 125$ معلوم کیجیے

حل: $8 \times 1769 \times 125 = 8 \times 125 \times 1769$

(یہاں آپ نے کون سی خاصیت استعمال کی ہے)

$= (8 \times 125) \times 1769$

$= 1000 \times 1769 = 17,69,000.$

کوشش کیجیے

معلوم کیجیے: $25 \times 8358 \times 4$

$625 \times 3759 \times 8$

سوچیے، بحث کیجیے اور لکھیے

کیا $(16 \div 4) \div 2 = 16 \div (4 \div 2)$؟

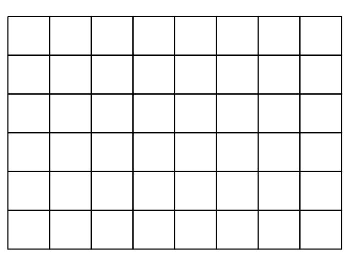
کیا تقسیم کے لیے بھی کوئی تلازمی خاصیت ہے؟ نہیں۔

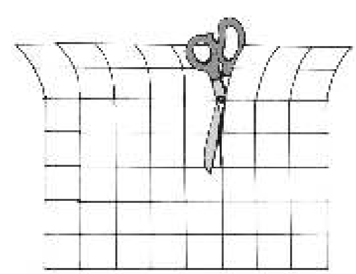
اپنے دوستوں سے اِس بارے میں بات کیجیے اور $(28 \div 14) \div 2$ اور $28 \div (14 \div 2)$ کے بارے میں سوچیے

اسے کیجیے

جمع پر ضرب کی تقسیمی خاصیت (Distributivity of Multiplication over Addition)

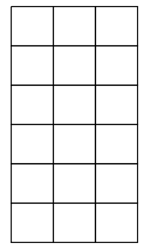
ایک 6 سم چوڑا اور 8 سم لمبا گراف پیپر لیجیے جس میں 1 سم 1 سم کے مربّع ہوں۔
اِس میں کل کتنے مُربّع ہیں؟



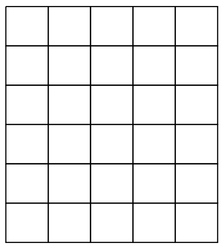


کیا یہ عدد 8×6 ہے؟

اب اِس کاغذ کو 6 سم × 5 سم اور 6 سم 3 سم کے سائز کے دو حصّوں میں کاٹئے۔ جیسا کہ مندرجہ بالا تصویر میں دکھایا گیا ہے۔



مربّعوں کی تعداد: کیا یہ 6×5 ہے؟



مربّعوں کی تعداد: کیا یہ 6×3 ہے؟

دونوں ٹکڑوں میں کل کتنے مربّع ہیں۔

کیا یہ $(6 \times 3) + (6 \times 5)$ ہے؟ کیا اِس کا مطلب $6 \times 8 = (6 \times 5) + (6 \times 3)$؟

لیکن $6 \times 8 = 6 \times (5 + 3)$

کیا یہ $6 \times (5 + 3) = (6 \times 5) + (6 \times 3)$ کو ظاہر کرتا ہے؟

اِسی طرح آپ دیکھیں گے کہ $2 \times (3 + 5) = (2 \times 3) + (2 \times 5)$

اس کو جمع پر ضرب کی تقسیمی خاصیت کہتے ہیں۔

تقسیمی خاصیت کا استعمال کرتے ہوئے معلوم کیجیے $4 \times (5 + 8)\ ;\ 6 \times (7 + 9)\ ;\ 7 \times (11 + 9)$

سوچیے، بحث کیجیے اور لکھیے

درج ذیل ضرب کا مشاہدہ کیجیے اور اِس پر بات چیت کیجیے کہ کیا ہم اعداد کو ضرب کرتے وقت اِس تصوّر (جمع پر ضرب کی تقسیمی خاصیت) کو لاگو کرسکتے ہیں یا نہیں۔

425			
×136			
2550	←	425×6	(6 اکائی سے ضرب)
12750	←	425×30	(3 دہائی سے ضرب)
42500	←	425×100	(1 سینکڑے ضرب)
57800	←	$425 \times (6 + 30 + 100)$	

مثال نمبر 5: اسکول کی کینٹین میں ایک دن کا دوپہر کا کھانا 20 ` اور دودھ 4 ` کا فروخت ہے۔
5 دن میں آپ ان چیزوں پر کتنے روپے خرچ کریں گے؟

حل: اسے دو طریقوں سے معلوم کیا جا سکتا ہے؟

پہلا طریقہ: 5 دن کے لئے دوپہر کے کھانے پر خرچ معلوم کیجیے۔

5 دن کا دودھ کا خرچہ معلوم کیجیے۔

اب اِس کو جمع کیجیے۔

دوپہر کے کھانے کا خرچ = $5 \times 20 =$ ` 100

دودھ کا خرچ = $5 \times 4 =$ ` 20

کل خرچہ = ` $(100 + 20) =$ ` 120

دوسرا طریقہ: ایک دن میں آنے والا کل خرچہ معلوم کیجیے۔

پھر اِس کو 5 سے ضرب کر دیجیے۔

ایک روز کا (دوپہر کے کھانے اور دودھ) کا خرچہ = ` $(20 + 4)$

5 دن کا خرچہ = ` $5 \times (20 + 4) =$ ` $(5 \times 24) =$ ` 120

مثال سے ظاہر ہوا کہ

$$5 \times (20 + 4) = (5 \times 20) + (5 \times 4)$$

یہ جمع پر ضرب کی تقسیم کی تقسیمی خاصیت ہے۔

مثال نمبر 6: تقسیمی خاصیت کا استعمال کر کے 12×35 معلوم کیجیے۔

حل:

$$12 \times 35 = 12 \times (30 + 5)$$
$$= 12 \times 30 + 12 \times 5$$
$$= 360 + 60 = 420$$

کوشش کیجیے

تقسیمی خاصیت کا استعمال کر کے 15×68؛ 17×23؛ $69 \times 78 + 22 \times 69$ معلوم کیجیے

مثال نمبر 7: حل کیجیے $126 \times 55 + 126 \times 45$

حل:

$$126 \times 55 + 126 \times 45 = 126 \times (55 + 45)$$
$$= 126 \times 100$$
$$= 12600.$$

تماثل (جمع اور ضرب کے لیے) (Identity for Addition and Multiplication)

مکمّل اعداد کا مجموعہ، طبعی اعداد کے مجموعہ سے کس طرح مختلف ہے؟ مکمّل اعداد کے مجموعہ میں صفر ہوتا ہے جب کہ طبعی اعداد میں صفر نہیں ہوتا ہے۔ یہ عدد 'صفر' جمع میں ایک امتیازی کردار ادا کرتا ہے۔ آپ کو درج ذیل

7	+	0	=	7
5	+	0	=	5
0	+	15	=	15
0	+	26	=	26
0	+	.....	=	.....

جدول اس کے کردار کا اندازہ کرنے میں مدد کرے گی۔ جب آپ کسی مکمل عدد میں صفر کو جوڑتے ہیں تو جواب کیا ہوتا ہے؟ یہ تو پھر وہی مکمل عدد ہوتا ہے۔ صفر کو مکمّل اعداد کی جمع کے لیے تماثلی عنصر یا جمعی تماثل (Identity for addition) کہتے ہیں۔

صفر کا ضرب میں بھی امتیازی کردار ہے کسی بھی عدد کو جب صفر سے ضرب کرتے ہیں تو جواب صفر آتا ہے۔

مثال کے طور پر درج ذیل نمونہ کا مشاہدہ کیجیے۔

$5 \times 6 = 30$
$5 \times 5 = 25$
$5 \times 4 = 20$
$5 \times 3 = 15$
$5 \times 2 = \ldots$
$5 \times 1 = \ldots$
$5 \times 0 = ?$

غور کیجیے کہ حاصل ضرب کیسے کم ہوتا جارہا ہے۔
کیا آپ نے کوئی نمونہ دیکھا؟
کیا آپ نے آخری مرحلہ کا اندازہ لگایا؟
کیا یہ نمونہ دوسرے مکمل اعداد کے لیے بھی درست ہوگا؟
دو مختلف مکمل اعداد کے لیے اس عمل کو دہرایے۔

7	×	1	=	7
5	×	1	=	5
1	×	12	=	12
1	×	100	=	100
1	×	......	=	......

آپ نے مکمل اعداد کی جمع کے عمل کے لیے تماثلی عنصر کو دیکھا ہے۔ صفر کو جمع کرنے پر عدد میں کوئی تبدیلی نہیں آتی ہے۔ اسی طرح مکمل اعداد کی ضرب کے عمل کے لیے بھی تماثلی عنصر ہوتا ہے۔ مشاہدہ کیجیے :

آپ ٹھیک ہیں۔ مکمل اعداد کا ضربی تماثل ہے ۔

مشق: 2.2

1۔ مناسب ترتیب سے درج ذیل کی حاصل جمع معلوم کیجیے :

(a) $837 + 208 + 363$ (b) $1962 + 453 + 1538 + 647$

2۔ مناسب ترتیب سے درج ذیل کی حاصل ضرب معلوم کیجیے :

(a) $2 \times 1768 \times 50$ (b) $4 \times 166 \times 25$ (c) $8 \times 291 \times 125$

(d) $625 \times 279 \times 16$ (e) $285 \times 5 \times 60$ (f) $125 \times 40 \times 8 \times 25$

3۔ درج ذیل میں ہر ایک کی قدر معلوم کیجیے :

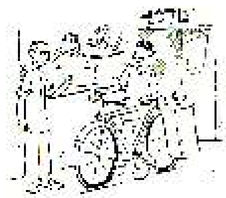
(a) $297 \times 17 + 297 \times 3$ (b) $54279 \times 92 + 8 \times 54279$

(c) $81265 \times 169 - 81265 \times 69$ (d) $3845 \times 5 \times 782 + 769 \times 25 \times 218$

4۔ مناسب خصوصیات کا استعمال کر کے حاصل ضرب معلوم کیجیے ؟

(a) 738×103 (b) 854×102 (c) 258×1008 (d) 1005×168

5۔ ایک ٹیکسی ڈرائیور نے پیر کے دن اپنی ٹیکسی میں 40 لیٹر پٹرول بھروایا۔ اگلے دن اس نے 50 لیٹر پٹرول بھروایا۔ اگر پٹرول کی قیمت 44 ` فی لیٹر ہے تو بتایئے اس نے پٹرول پر کتنے روپے خرچ کیے؟



6۔ ایک دودھ والا ایک ہوٹل میں صبح کو 32 لیٹر دودھ اور شام کو 68 لیٹر دودھ دیتا ہے اگر دودھ کی قیمت 15 روپے فی لیٹر ہے تو دودھ والے کو ایک دن میں کتنے روپے ملیں گے؟

7۔ مندرجہ ذیل کے جوڑے ملایئے؟

(a) ضرب کے تحت تقلیبی (i) $425 \times 136 = 425 \times (6 + 30 + 100)$

(b) جمع کے تحت تقلیبی (ii) $2 \times 49 \times 50 = 2 \times 50 \times 49$

(c) جمع پر ضرب کی تقسیمی خاصیت (iii) $80 + 2005 + 20 = 80 + 20 + 2005$

2.5 مکمل اعداد میں نمونے (Patterns in Whole Numbers)

ہم اعداد کو نقطوں کے ذریعے بنی بنیادی شکلوں میں ترتیب دینے کی کوشش کریں گے جو شکلیں ہم لیں گے وہ درج ذیل ہیں: (1) ایک لائن یا خط (2) ایک مستطیل (3) ایک مربع (4)ایک مثلث ہر عدد کو ان میں سے کسی ایک شکل میں مرتب کیا جانا چاہیے۔ کوئی دوسری شکل بنانے کی اجازت نہیں۔

ہر عدد کو ایک خط کی شکل میں ترتیب دیا جا سکتا ہے۔

- عدد 2 کو اس طرح دکھایا جا سکتا ہے۔ ● ●
  عدد 3 کو اس طرح دکھایا جا سکتا ہے۔ ● ● ●
  اور اسی طرح آگے کے اعداد بھی۔
- کچھ اعداد کو مستطیل کی شکل میں بھی دکھایا جا سکتا ہے۔
  مثال کے طور پر 6 کو مستطیل کی شکل میں دکھایا جا سکتا ہے۔ ● ● ●
  نوٹ کیجیے کہ یہاں 2 قطاریں اور 3 کالم ہیں۔ ● ● ●
- کچھ اعداد جیسے 4 یا 9 وغیرہ کو مربع کی شکل میں بھی ترتیب دیا جا سکتا ہے۔

$9 \longrightarrow$ ● ● ● / ● ● ● / ● ● ● $4 \longrightarrow$ ● ● / ● ●

- کچھ اعداد کو مثلث کی طرح بھی ترتیب دیا جاتا ہے۔ مثال کے طور پر ۔

نوٹ کیجیے کہ مثلث کے دو اضلاع برابر ہونے چاہیے۔ سب سے نیچے سے شروع ہونے والی قطاروں میں نقطوں کی تعداد 4 ,3 ,2 ,1 ہونی چاہیے۔ سب سے اوپر والی قطار میں ہمیشہ ایک ہی نقطہ ہوگا۔

درج ذیل جدول کو مکمل کیجیے :

عدد	خط	مستطیل	مربع	مثلث
2	ہاں	نہیں	نہیں	نہیں
3	ہاں	نہیں	نہیں	ہاں
4	ہاں	ہاں	ہاں	نہیں
5	ہاں	نہیں	نہیں	نہیں
6				
7				
8				
9				
10				
11				
12				
13				

عدد "1" ایک خاص عدد ہے۔

کوشش کیجیے

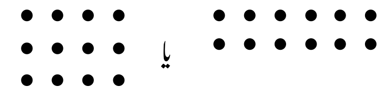
1۔ کون سے اعداد صرف ایک خط کی شکل میں دکھائے جا سکتے ہیں؟

2۔ کون سے مربع کی شکل میں دکھائے جا سکتے ہیں؟

3۔ کون سے اعداد مستطیل کی شکل میں دکھائے جا سکتے ہیں؟

4۔ شروعاتی سات مثلث نما اعداد لکھیے ۔ (یعنی وہ اعداد جن کو مثلث کی شکل میں ترتیب دیا جا سکتا ہے) 3، 6، ...

5۔ کچھ اعداد کو دو مستطیل نما اعداد کی شکل میں دکھایا جا سکتا ہے۔ مثال کے طور پر۔

12 ⟶ 

3×4 یا 2×6

اسی طرح کی کم از کم پانچ اور مثالیں دیجیے

نمونوں (Patterns) کا مشاہدہ کیجیے

نمونوں کا مشاہدہ کرنے سے آپ کو عملوں کو آسان بنانے میں مدد ملتی ہے۔ درج ذیل کو پڑھیے:

(a) $126 = 127 - 1 = 117 + 10 - 1 = 117 + 9$

(b) $108 = 107 + 1 = 117 - 10 + 1 = 117 - 9$

(c) $216 = 217 - 1 = 117 + 100 - 1 = 117 + 99$

(d) $18 = 17 + 1 = 117 - 100 + 1 = 117 - 99$

کیا یہ نمونہ آپ کو ...... 9، 99، 999 وغیرہ جیسے اعداد کی جمع اور تفریق کرنے میں مددگار ہوگا؟

یہاں ایک اور نمونہ دیکھیے :

(a) $84 \times 9 = 84 \times (10 - 1)$ (b) $84 \times 99 = 84 \times (100 - 1)$

(c) $84 \times 999 = 84 \times (1000 - 1)$

کیا آپ کو ...... 9، 99، 999 جیسے اعداد سے ایک عدد کو ضرب کرنے کا آسان اور چھوٹا طریقہ ملا۔

اس طرح کے چھوٹے اور آسان طریقے آپ کے سوالات کو زبانی حل کرنے میں مددگار ہوتے ہیں۔

درج ذیل نمونہ آپ کو ایک ایسا طریقہ بتاتا ہے جس کی مدد سے آپ ایک عدد کو 5 یا 25 یا 125 (آپ اس کو کچھ اور بھی بڑھا سکتے ہیں) سے ضرب کر سکتے ہیں۔

(i) $96 \times 5 = 96 \times \frac{10}{2} = \frac{960}{2} = 480$ (ii) $96 \times 25 = 96 \times \frac{100}{4} = \frac{9600}{4} = 2400$

(iii) $96 \times 125 = 96 \times \frac{1000}{8} = \frac{96000}{8} = 12000...$

درج ذیل نمونے کیا بتا رہے ہیں؟

(i) $64 \times 5 = 64 \times \frac{10}{2} = 32 \times 10 = 320 \times 1$

(ii) $64 \times 15 = 64 \times \frac{30}{2} = 32 \times 30 = 320 \times 3$

(iii) $64 \times 25 = 64 \times \frac{50}{2} = 32 \times 50 = 320 \times 5$

(iv) $64 \times 35 = 64 \times \frac{70}{2} = 32 \times 70 = 320 \times 7......$

مشق : 2.3

1۔ درج ذیل میں سے کون صفر کو ظاہر نہیں کرے گا؟

(a) $1 + 0$ (b) 0×0 (c) $\frac{0}{2}$ (d) $\frac{10\ \ 10}{2}$

2۔ اگر دو مکمل اعداد کا حاصل ضرب صفر ہے تو کیا ہم کہہ سکتے ہیں کہ ان دونوں میں سے کوئی ایک یا وہ دونوں صفر ہوں گے؟ ایسا جواب مثالوں کے ذریعے صحیح ثابت کیجیے؟

3۔ اگر دو مکمل اعداد کا حاصل ضرب ایک ہے تو کیا ہم کہہ سکتے ہیں کہ ان دونوں میں سے ایک یا وہ دونوں 1 ہوں گے؟ مثالوں کے ذریعے صحیح ثابت کیجیے؟

4۔ تقسیمی خاصیت کا استعمال کرتے ہوئے درج ذیل کو معلوم کیجیے؟

(a) 728×101 (b) 5437×1001 (c) 824×25

(d) 4275×125 (e) 504×35

5۔ درج ذیل نمونہ کو پڑھیں:

$1 \times 8 + 1 = 9$

$12 \times 8 + 2 = 98$

$123 \times 8 + 3 = 987$

$1234 \times 8 + 4 = 9876$

$12345 \times 8 + 5 = 98765$

اگلے دو مرحلے لکھیے ۔ کیا آپ بتا سکتے ہیں کہ نمونے کیسے کام کرتے ہیں:

(اشارہ: $12345 = 11111 + 1111 + 111 + 11 + 1$)

ہم نے کیا سیکھا؟

1۔ اعداد 1، 2، 3،...... جس کو ہم گننے کے لیے استعمال کرتے ہیں طبعی اعداد کہلاتے ہیں۔

2۔ اگر ایک طبعی عدد میں ایک کو جمع کیا جائے تو ہم کو اس کا جانشین ملتا ہے۔ اگر آپ طبعی عدد میں سے ایک گھٹا دیں تو آپ کو اس کا پیش رو ملتا ہے۔

3۔ ہر طبعی عدد کا جانشین ہوتا ہے اور عدد 1 کے علاوہ ہر طبعی عدد کا ایک پیش رو ہوتا ہے۔

4۔ اگر ہم طبعی اعداد کے مجموعہ میں صفر کو جمع کریں تو ہم کو مکمل اعداد کا مجموعہ حاصل ہوتا ہے۔ اس لیے اعداد 0، 1، 2، 3،...... مکمل اعداد کے مجموعہ کو بناتے ہیں۔

5۔ ہر مکمل عدد کا ایک جانشین ہوتا ہے۔ صفر کے علاوہ ہر مکمل عدد کا ایک پیش رو بھی ہوتا ہے۔

6۔ تمام طبعی اعداد مکمل اعداد ہوتے ہیں لیکن سبھی مکمل اعداد طبعی اعداد نہیں ہوتے ہیں۔

7۔ ہم ایک خط لیتے ہیں، اس پر ایک نقطہ لگاتے ہیں اور اس کو 0 سے ظاہر کرتے ہیں ۔ پھر ہم صفر کے داہنی طرف برابر فاصلہ پر نشان لگاتے ہیں۔ اور ان کو 1، 2، 3،...... سے ظاہر کرتے ہیں۔ اس طرح ہم کو مکمل اعداد کا ایک عددی خط ملتا ہے۔ ہم عددی خط پر آسانی سے جمع ، گھٹا اور ضرب کے عملیات کر سکتے ہیں۔

8۔ جمع، عددی خط پر داہنی طرف لے جاتا ہے جب کہ تفریق عددی خط پر بائیں طرف لے جاتا ہے۔ ضرب ہم کو صفر سے شروع کر کے برابر فاصلہ کے قدم اختیار کرتے ہوئے آگے بڑھاتی ہے۔

9۔ دو مکمل اعداد کو جمع کرنے سے ہمیں مکمل عدد ہی ملتا ہے۔ اسی طرح دو مکمل اعداد کا حاصل ضرب بھی مکمل عدد ہی ہوتا ہے۔ ہم کہتے ہیں کہ مکمل اعداد جمع اور ضرب کے تحت بندشی ہوتے ہیں جب کہ مکمل اعداد تفریق اور تقسیم کے تحت بندشی نہیں ہوتے ہیں۔

10۔ صفر سے تقسیم ایک بے معنی عمل ہے۔

11۔ صفر مکمل اعداد کی جمع کے لیے تماثلی عنصر ہے۔ اور عدد '1' مکمل اعداد کی ضرب کے لیے تماثلی عنصر ہے۔

12۔ آپ مکمل اعداد کو کسی بھی ترتیب میں جوڑ سکتے ہیں ۔ آپ دو مکمل اعداد کو کسی بھی ترتیب میں ضرب کر سکتے ہیں، ہم کہہ سکتے ہیں کہ مکمل اعداد کی جمع اور ضرب تقلیبی ہیں۔

13۔ مکمل اعداد کی جمع اور ضرب تلازمی بھی ہے۔

14۔ مکمل اعداد کی جمع پر ضرب تقسیمی ہے۔

15۔ مکمل اعداد کی تقلیبی، تلازمی اور تقسیمی خصوصیات تحسیب کو آسان بنانے میں بہت مددگار ثابت ہوتی ہیں۔ اور ہم ان خصوصیات کا احساس کئے بغیر یا (جانے بنا) ہی ان کا استعمال کرتے رہتے ہیں۔

16۔ اعداد کے نمونے (Patterns) نہ صرف دلچسپ ہوتے ہیں بلکہ زبانی حساب لگانے میں کار آمد بھی ہوتے ہیں۔ اور اعداد کی خصوصیات کو زیادہ بہتر طریقے سے سمجھنے میں مددگار بھی ہوتے ہیں۔