अध्याय 13

सममिति

13.1 भूमिका

सममिति हमारे दैनिक जीवन में प्रयोग होने वाला एक आम शब्द है। जब हम ऐसे आकृतिों या आकृतियों को देखते हैं जो बराबर संतुलित अनुपात में हों तब हम कहते हैं, **"ये आकृतियाँ सममित आकृतियाँ हैं।"**

ताजमहल (उ.प्र.)

तिरूवन्नामलाई (तमिलनाडु)

अपनी सममित बनावट के कारण इन पुरातत्वीय आकृतियों ने अद्‌भुत स्थापत्य बना रखा है।

कल्पना कीजिए हम एक आकृति को आधे (अर्ध) से इस तरह मोड़े कि उसका आधा बायाँ भाग तथा आधा दायाँ भाग एक दूसरे से पूर्णतया मिलता जुलता हो तब हम कहेगें कि आकृति में सममित रेखा उपस्थित है। हम देख सकते हैं कि दोनों आधे भाग एक दूसरे के (दर्पण) प्रतिबिंब हैं। यदि हम आकृति के मोड़ने वाले स्थान पर एक दर्पण को रख देते हैं तो आकृति के एक भाग का प्रतिबिंब के दूसरे भाग को पूर्णतया ढ़क लेगा। ऐसा जब भी घटित होता है तो यह तह या मोड़ (वास्तविक या काल्पनिक), जो दर्पण रेखा है, आकृति की सममिति रेखा (या सममित अक्ष) कहलाती है।

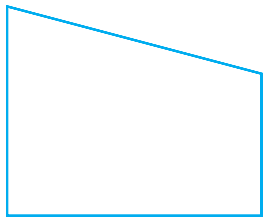
आकृति 13.1

यहाँ पर आप जो भी आकृतियाँ या आकार देख रहे हैं वे सभी आकृतियाँ सममित आकृतियाँ हैं। क्यों?

जब आप इन्हें बिंदुकित रेखा की तरफ से मोड़ते हैं तो आकृति का एक आधा भाग, दूसरे आधे भाग को पूर्णतया ढ़क लेता है। इस आकृति में आप बिंदु अंकित रेखा को क्या नाम देगें? आप आकृति में दर्पण को किस जगह पर रखेंगें जिससे कि प्रतिबिंब आकृति के दूसरे भाग को पूर्णतया ढ़क ले?

आकृति 13.2 एक सममित आकृति नहीं है।

क्या बता सकते हैं, क्यों नहीं?



आकृति 13.2

13.2 सममित आकृतियाँ बनाना : इंक-ब्लाट डेविल्स

इन्हें कीजिए

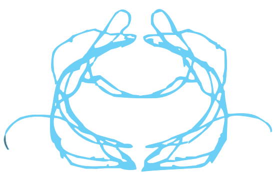
कागज़ का एक टुकड़ा लीजिए। इसे आधे भाग से मोड़िए। स्याही की कुछ बूंदों को आधे भाग पर डालिए।

अब दोनों आधे भागों को दबाइए।

आप क्या देखते हैं?

क्या प्राप्त आकृति सममित आकृति है? यदि हाँ, तो बताइए सममित रेखा कहाँ है। क्या ऐसी कोई अन्य रेखा भी है जहाँ से मोड़ने पर दो समान भाग प्राप्त हो सकते हों? ऐसे ही कुछ और प्रतिरूपों का प्रयास कीजिए।

स्याही धागा प्रतिरूप



एक कागज़ को आधे भाग से मोड़िए। उनमें से एक आधे भाग पर कम लंबाई के धागों को अलग-अलग स्याही या पेंट में डुबोकर व्यवस्थित कीजिए। अब दोनों आधे भागों को इकट्ठे दबाइए। प्राप्त आकृति का अध्ययन कीजिए। क्या यह एक सममित आकृति है? इसे और कितने तरीकों से मोड़ा जा सकता है जिससे दो समान भाग प्राप्त हो सकें?

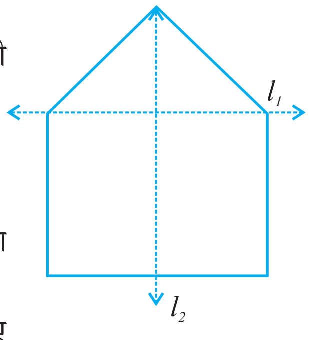
प्रयास कीजिए

आपके ज्यामिति बॉक्स में दो सेट स्क्वेयर हैं। क्या ये सममित हैं?

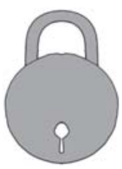
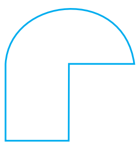
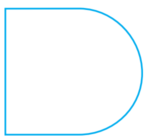
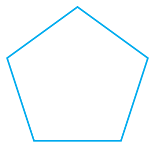
अपनी कक्षा में उपलब्ध कुछ वस्तुओं की सूची बनाइए जैसे श्यामपट्ट (black board), मेज, दीवार, पाठ्यपुस्तक इत्यादि। इनमें से कौन सी वस्तुएँ सममित हैं और कौन सी सममित नहीं हैं? क्या आप उन में से सममित वस्तुओं की सममित रेखा पहचान सकते हैं।

प्रश्नावली 13.1

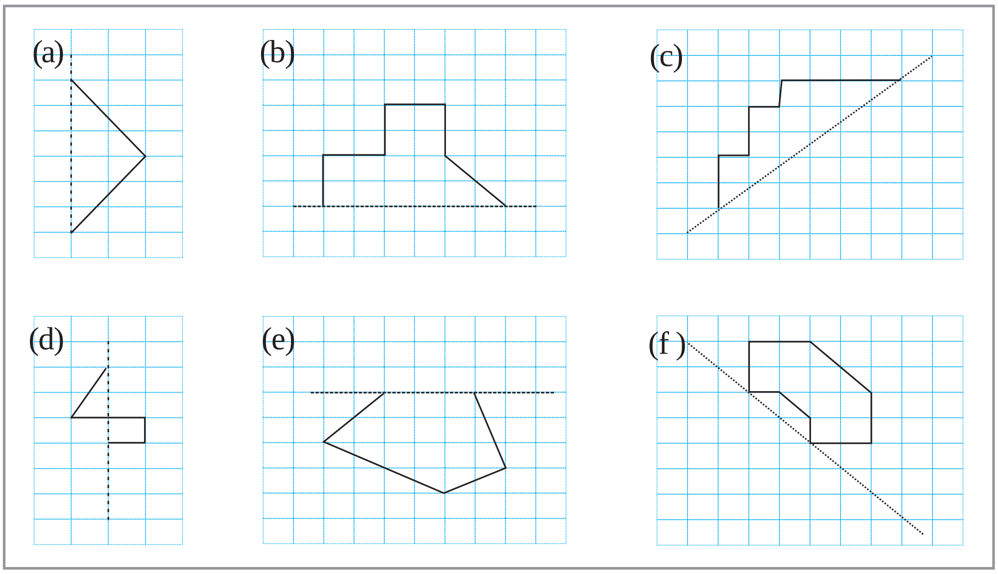
1. अपने घर अथवा विद्यालय की ऐसी चार वस्तुओं की सूची बनाइए जो सममित हों।



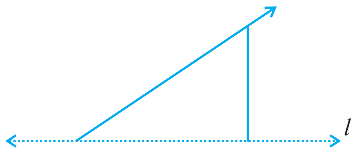
2. दी गई आकृति में कौन सी दर्पण रेखा अर्थात् सममित रेखा है l_1 या l_2?
3. नीचे दी गई आकृतियों की पहचान कीजिए। जाँच कीजिए कि क्या ये आकृतियाँ सममित हैं या नहीं। उनकी सममिति की रेखा भी खींचिए।

a) 
b)
c) 
d)
e) 
f) 

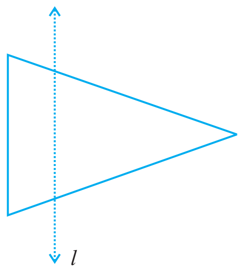
4. नीचे दी गई आकृतियों को वर्गांकित पेपर पर बनाइए। आपने वर्गांकित पेपर का प्रयोग अपनी पिछली कक्षाओं में अंकगणित नोट बुक में किया होगा। इन आकृतियों को इस तरह पूरा कीजिए कि बिंदुकित रेखा ही सममित रेखा हो।



5. नीचे दी गई आकृति में, l सममिति की रेखा है। इस आकृति को पूरा कीजिए जिससे यह सममित हो जाए।



6. आकृति में, l सममिति की रेखा है।
त्रिभुज का प्रतिबिंब खींचिए और इस आकृति को पूरा कीजिए जिससे यह सममित हो जाए।

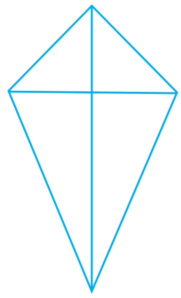


13.3 आकृतियाँ जिनमें दो सममित रेखाएँ हों

इन्हें कीजिए

एक पतंग

आपके ज्यामिति बॉक्स में दो सेट स्क्वेयर में से एक के कोणों की माप 30°, 60° और 90° है।



ऐसे ही दो समान सेट स्क्वेयर लीजिए। उन्हें आपस में मिलाकर रखिए और एक पतंग बनाइए जैसा आकृति में दिखाया गया है।

इस आकृति में कितनी सममिति की रेखाएँ हैं? क्या आप सोचते हैं कि कुछ आकृतियों में एक से अधिक सममित रेखाएँ होती हैं।

एक आयत

एक आयताकार कागज़ लीजिए (जैसे डाक-लिफाफा)। इसे एक बार लंबाई की ओर मोड़िए जिससे कि एक आधा भाग दूसरे आधे भाग को पूर्णतया ढ़क लें। क्या यह मोड़ एक सममिति की रेखा है। क्यों?

इसे खोलिए और पुन: एक बार चौड़ाई की ओर से समान तरीके से मोड़िए। क्या यह दूसरा मोड़ भी सममिति की रेखा है? क्यों?

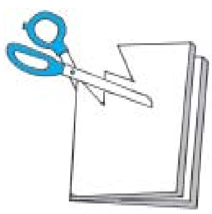
पहला मोड़ दूसरा मोड़

क्या आपको लगता है कि ये दो रेखाएँ, सममिति की रेखाएँ हैं?

प्रयास कीजिए

दो या अधिक सेट स्क्वेयर को मिलाकर आप जितनी भी आकृतियाँ बना सकते हैं, बनाइए? इन्हें वर्गांकित कागज़ पर बनाइए और सममित रेखा बताइए।

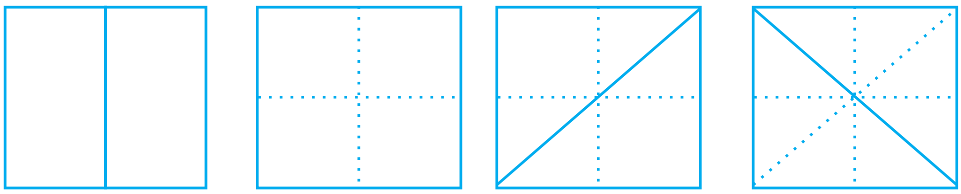
तो तहों वाले कागज़ से काटी गई आकृति



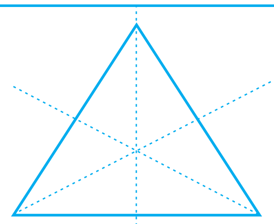
एक आयताकार कागज़ का टुकड़ा लीजिए। इसे एक बार मोड़िए और पुन: एक बार मोड़िए। कुछ डिजाइन बनाइए जैसा कि दिखाया गया है। जो आकृति बनाई गई है उसे काटिए और खोलिए (खोलने से पहले उस आकृति का अनुमान लगाइए जिसे आप प्राप्त करेगें)।

जिस आकृति को काटा गया है उसमें कितनी सममिति की रेखाएँ हैं? ऐसी कुछ और डिजाइनों को बनाइए।

13.4 अनेक सममित रेखाओं (दो से अधिक) वाली आकृतियाँ



एक वर्गाकार कागज़ का टुकड़ा लीजिए। इसे ऊर्ध्वाधर (vertically) में आधे से मोड़िए और पुनः क्षैतिज (horizontally) से आधे भाग से मोड़िए (अर्थात् आपने इसे दो बार मोड़ा)। इसे खोलिए और पुनः वर्ग को आधे भाग से मोड़िए (यानि तीसरी बार), लेकिन इस बार विकर्ण के साथ-साथ जैसा कि आकृति में दिखाया गया है। इसे पुनः खोलिए और आधे भाग से मोड़िए (चौथी बार), लेकिन इस बार दूसरे विकर्ण के साथ-साथ जैसा कि आकृति में दिखाया गया है।

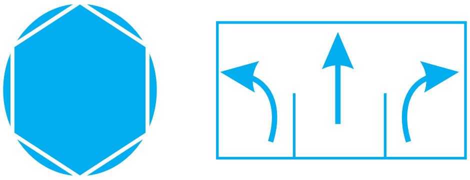


समबाहु त्रिभुज की 3 सममित रेखाएँ

इसे खोलिए। इस आकृति में कितनी सममिति की रेखाएँ हैं? कुछ आकृतियों में केवल एक ही सममिति की रेखा होती है, कुछ में दो, और कुछ में तीन या अधिक सममिति की रेखाएँ होती हैं। क्या आप एक ऐसी आकृति को सोच सकते हैं जिसमें 6 सममिति की रेखाएँ हों?

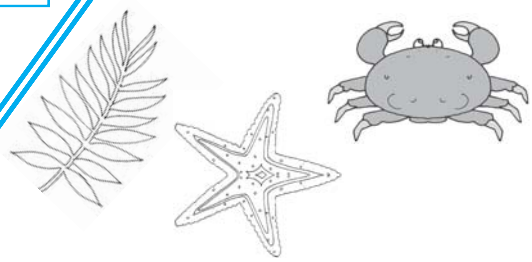
सममिति, सममित प्रत्येक स्थान पर

- आप प्रतिदिन ऐसे बहुत से मार्गसूचक संकेत या

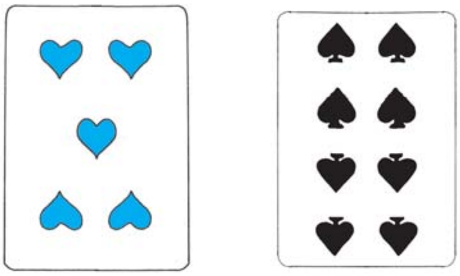


चिह्न देखते हैं जिनमें सममिति की रेखाएँ होती हैं। यहाँ पर ऐसे ही कुछ चिह्न (संकेत) दिए गए हैं: ऐसे ही कुछ और मार्गसूचक संकेतों को पहचानो और उन्हें बनाओ। सममिति की रेखाओं को इंगित करना मत भूलिए

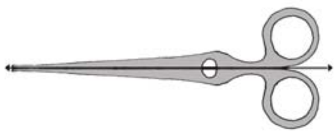
- प्रकृति में बहुत सी वस्तुएँ ऐसी हैं जिनकी आकृतियाँ सममित हैं। इन्हें देखिए :



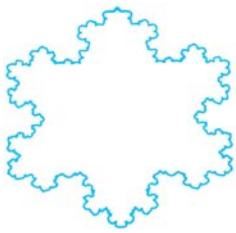
- ताश के कुछ पत्तों के डिजाइन में सममिति की रेखाएँ होती हैं। दिए गए ताश के पत्तों में उन्हें पहचानिए।



- यहाँ एक कैंची का युग्म है! इसमें कितनी सममिति की रेखाएँ हैं?

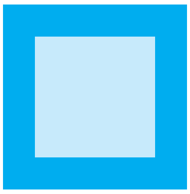


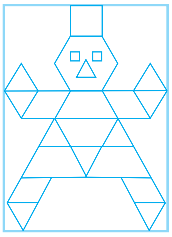
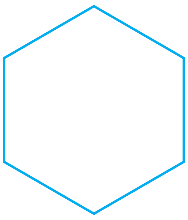
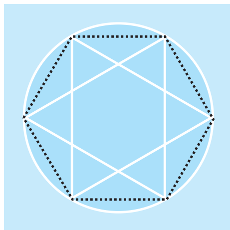
- इस सुंदर आकृति का निरीक्षण कीजिए यह एक सममित पैटर्न है जो कि कोच स्नोफलेक (koch's Snowflake) के नाम से जाना जाता है। (यदि आपके पास कंप्यूटर है तो आप फ्रेक्टल (Fractals) विषय पर ब्राऊस कीजिए और आपको ऐसी बहुत सुंदर आकृतियाँ देखने को मिलेंगी।) इन आकृतियों में सममित की रेखाएँ ज्ञात कीजिए।

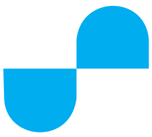
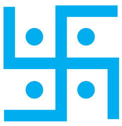
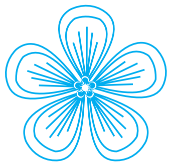


प्रश्नावली 13.2

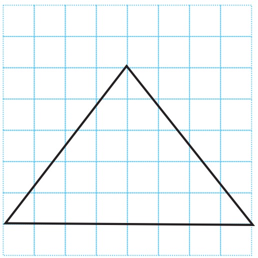
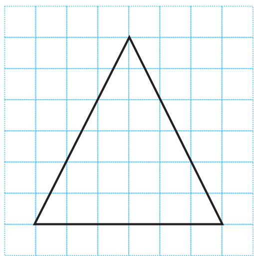
1. नीचे दी गई आकृतियों में प्रत्येक की सममित रेखाओं की संख्या ज्ञात कीजिए।

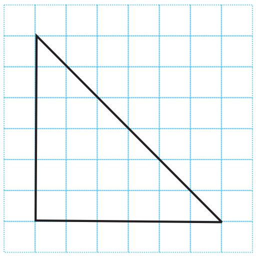
(a) 
(b)
(c)

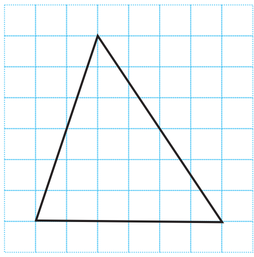
(d) 
(e) 
(f) 

(g) 
(h) 
(i) 

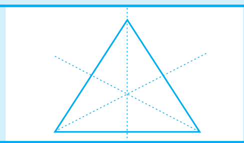
2. नीचे दी गई प्रत्येक आकृति में त्रिभुज को एक वर्गांकित पेपर पर बनाइए। प्रत्येक में सममिति की रेखा (रेखाओं) को यदि है तो उन्हें खींचिए और त्रिभुज के प्रकार को पहचानिए। (आप उनमें से कुछ आकृतियों का अनुरेख (trace) करना पसंद कर सकते हैं। पहले पेपर को मोड़ने वाली विधि द्वारा प्रयास करें)

(a) 
(b) 

(c) 

(d) 

3. निम्न तालिका को पूरा कीजिए :

आकार	आकृति खाका या रूपरेखा	सममिति की रेखाओं की संख्या
समबाहु त्रिभुज		3
वर्ग		
आयत		
समद्विबाहु त्रिभुज		
समचतुर्भुज		
वृत्त		

4. क्या आप एक ऐसा त्रिभुज बना सकते हो जिसमें
   (a) केवल एक ही सममित रेखा हो?
   (b) केवल दो ही सममित रेखाएँ हों?
   (c) केवल तीन ही सममित रेखाएँ हों?
   (d) कोई सममित रेखा न हो?
   प्रत्येक में आकृति की रूपरेखा (खाका) बनाइए।
5. एक वर्गांकित पेपर पर निम्न की रूपरेखा बनाइए :
   (**संकेत :** आपके लिए सहायक होगा यदि आप पहले सममिति की रेखा खीचें और उसके बाद आकृति को पूरा करें)

(a) एक त्रिभुज जिसमें क्षैतिज सममित रेखा तो हो परंतु ऊर्ध्वाधर सममित रेखा न हो।

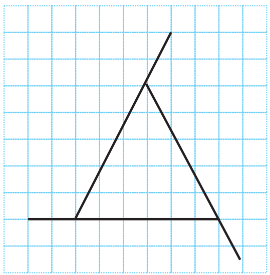
(b) एक चतुर्भुज जिसमें क्षैतिज और ऊर्ध्वाधर दोनों ही सममित की रेखा हों।

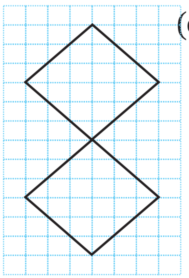
(c) एक चतुर्भुज जिसमें क्षैतिज सममित रेखा तो हो परंतु ऊर्ध्वाधर सममित रेखा न हो।

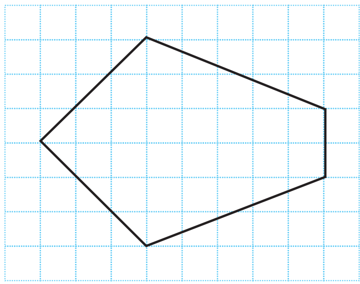
(d) एक षट्भुज जिसमें केवल दो ही सममित रेखाएँ हों।

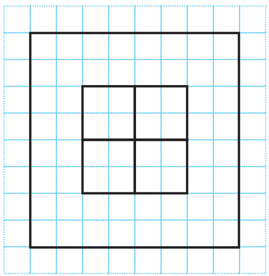
(e) एक षट्भुज जिसमें 6 सममित रेखाएँ हों।

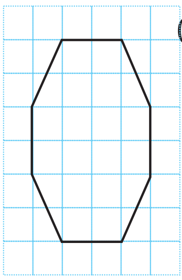
6. प्रत्येक आकृति का अनुरेखण (ट्रेस) कीजिए और सममिति की रेखाओं (सममित रेखा) को खींचिए।

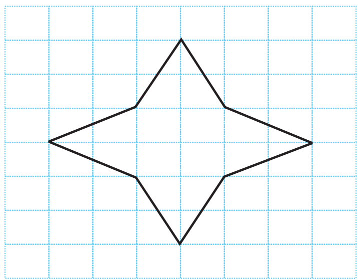
(a)


(b)


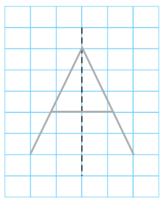
(c)


(d)


(e)


(f)


7. अंग्रेजी वर्णमाला के A से Z तक के सभी अक्षरों पर विचार कीजिए। इनमें से उन अक्षरों की सूची बनाइए जिनमें

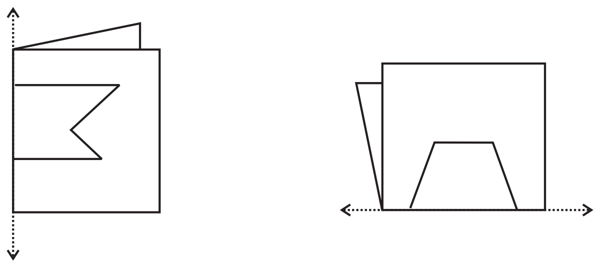


(a) उर्ध्वाधर सममिति की रेखाएँ हों (जैसा कि A)

(b) क्षैतिज सममिति की रेखाएँ हों (जैसा कि B)

(c) सममिति की रेखाएँ न हों (जैसा कि Q)

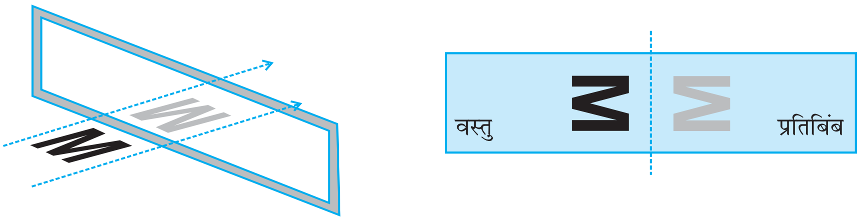
8. यहाँ पर कुछ मुड़ी हुई शीट की आकृतियाँ दी गई हैं जिनकी तह पर आकृतियाँ बनाई गई हैं। प्रत्येक में पूर्ण आकृति की रूपरेखा खींचिए जो डिज़ाइन के काटने के बाद दिखाई देगी।



13.5 प्रतिबिंब और सममिति

सममित रेखा और दर्पण प्रतिबिंब एक दूसरे से प्राकृतिक तौर पर संबंधित हैं।

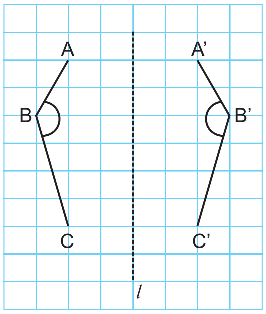
यहाँ एक आकृति दी गई है जिसमें अंग्रेजी अक्षर M का प्रतिबिंब दिखाया गया है। आप कल्पना कर सकते हैं कि दर्पण अदृश्य है और आप केवल अक्षर M तथा इसकी छाया या प्रतिबिंब को देख सकते हैं।



वस्तु और उसका प्रतिबिंब दर्पण रेखा के संदर्भ में सममित है। जब एक पेपर को मोड़ा जाता है तो दर्पण रेखा, सममिति की रेखा बन जाती है। तब हम कहते हैं कि छाया, दर्पण रेखा में वस्तु का प्रतिबिंब है। आप यह भी देख सकते हैं कि जब वस्तु परावर्तित होती है तो उसकी लंबाई और कोणों में बिल्कुल भी परिवर्तन नहीं होता है अर्थात् वस्तु की लंबाई और कोण तथा छाया की संगत लंबाई और कोण समान होते हैं। यद्यपि एक तरह से परिवर्तन होता है अर्थात् जैसे एक वस्तु तथा उसकी छाया में अंतर होता है। क्या आप कल्पना कर सकते हैं कि अंतर क्या है?

(**संकेत :** अपने आपको दर्पण में देखिए)

इन्हें कीजिए



एक वर्गांकित कागज़ पर एक आकृति ABC बनाइए और इसका प्रतिबिंब A'B'C' दर्पण रेखा l में ज्ञात कीजिए।

AB और A'B'; BC और B'C'; AC और A'C' की लंबाईयों की तुलना कीजिए।

क्या ये अलग हैं?

क्या प्रतिबिंब एक रेखाखंड की लंबाई में परिवर्तन करता है? ABC और A'B'C' कोणों की माप की तुलना कीजिए (कोण मापक की सहायता से मापिए) क्या प्रतिबिंब, कोण के आकार को बदल देता है।

AA', BB' और CC' को मिलाइए। कोण मापक की सहायता से l और AA', l और BB', l और CC' के बीच बने कोणों को मापिए।

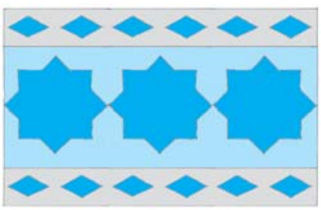
दर्पण रेखा l और किसी बिंदु और इसके प्रतिबिंब को मिलाने से बने रेखाखंड के बीच बने कोण के बारे में आप क्या निष्कर्ष निकालते हैं?

प्रयास कीजिए

यदि आप दर्पण के सामने 100 सेमी की दूरी पर हैं। आपका प्रतिबिंब कहाँ होगा? यदि आप दर्पण की ओर चलते हैं तो आपका प्रतिबिंब किस प्रकार चलता है?

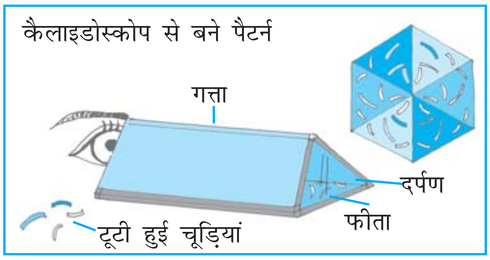
इन्हें कीजिए

कागज़ों द्वारा सजावट



एक पतला आयताकार रंगीन कागज़ लीजिए। इसे कई बार मोड़िए और कागज़ में कुछ जटिल प्रतिरूप बनाइए जैसा कि आकृति में दिखाया गया है। बार-बार आने वाले डिजाइनों में सममिति की रेखाओं की पहचान कीजिए। ऐसे सजावटी कर्तित कागज़ों का प्रयोग त्यौहारों के अवसरों पर कीजिए।

कैलाइडोस्कोप



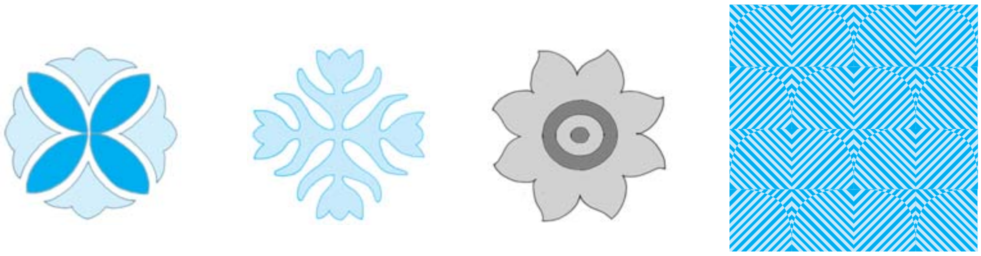
आकृति 13.1

अनेक दर्पणों वाले एक केलाइडोस्कोप में कई प्रतिबिंब बनते हैं जिनमें अनेकों सममिति की रेखाएँ होती हैं (जैसा यहाँ उदाहरण में दिखाया गया है)। प्राय: दो दर्पण पट्टियों को V आकार में रखकर प्रयोग किया जाता है। दर्पणों के बीच बने कोण सममिति की रेखाओं या सममित रेखाओं की संख्या को बताते हैं।

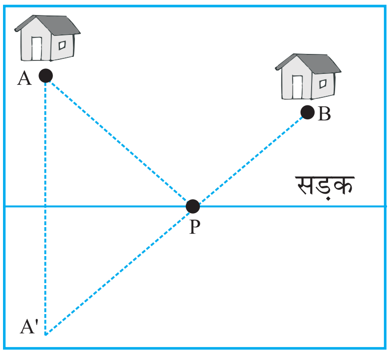
एक केलाइडोस्कोप बनाइए और इसके द्वारा बनाई गई सममित आकृतियों की कुछ और जानकारी प्राप्त करने का प्रयास कीजिए।

एलबम

सममित डिजाइनों को एकत्रित करके एक एलबम तैयार कीजिए। यहाँ पर कुछ नमूने दिए गए हैं।



परावर्त्तीय सममिति का उपयोग



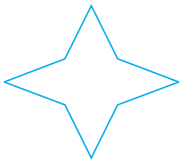
एक अखबार बाँटने वाला लड़का अपनी साईकिल को किसी बिंदु 'P' पर खड़ा करता है और अखबार A और B घरों में बाँटता है। उसे अपनी साईकिल को कहाँ पर खड़ा करना चाहिए जिससे AP + BP दूरी सबसे कम हो।

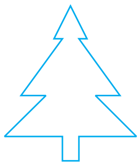
आप यहाँ पर परावर्तीय सममिति का प्रयोग कर सकते हैं। मार्ग को दर्पण रेखा लेने पर, माना A का

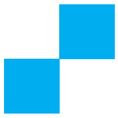
प्रतिबिंब A' प्राप्त होता है। तब हम कहेंगे कि बिंदु P साईकिल को खड़ा करने के लिए उपयुक्त स्थान है। (जहाँ दर्पण रेखा A'B को काटती है)। क्या आप कह सकते हैं क्यों?

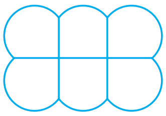
प्रश्नावली 13.3

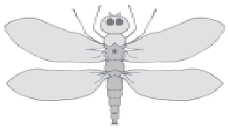
1. नीचे दी गई आकृतियों में सममिति की रेखाओं की संख्या ज्ञात कीजिए। आप अपने उत्तर की जाँच कैसे करेंगे?

(a) 

(b) 

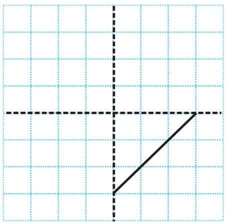
(c) 

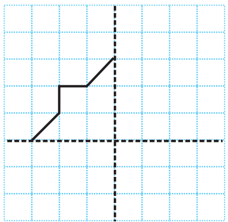
(d) 

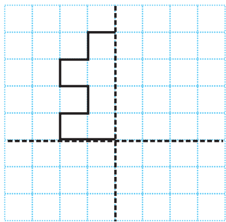
(e) 

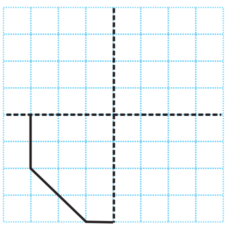
(f)

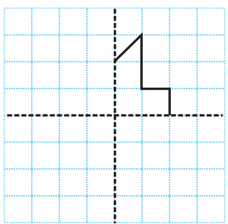
2. नीचे दी गई आरेखण को वर्गांकित पेपर पर बनाइए। प्रत्येक को पूरा कीजिए जिससे प्राप्त आकृति में दो बिंदुकित रेखाएँ दो सममिति की रेखाओं के रूप में हों :

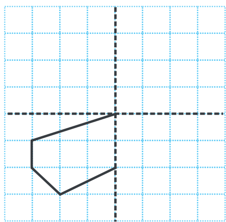
(a) 

(b) 

(c) 

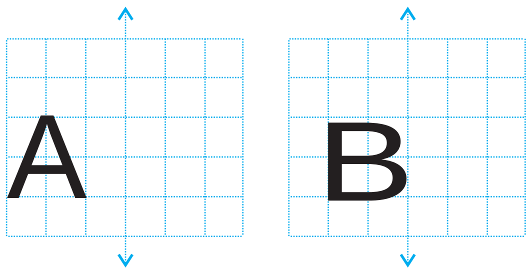
(d) 

(e) 

(f) 

आपने इस आकृति को कैसे पूरा किया?

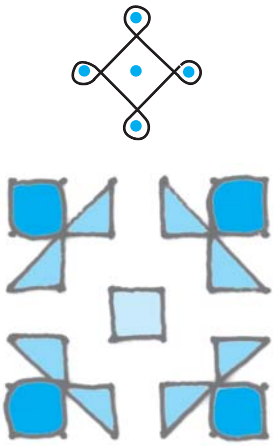
3. नीचे दी गई प्रत्येक आकृति में, अंग्रेजी वर्णमाला के एक अक्षर को उर्ध्वाधर रेखा के साथ दिखाया गया है। इस अक्षर का दी हुई दर्पण रेखा में प्रतिबिंब लीजिए। बताइए कौन सा अक्षर परावर्तन के बाद समान रहता है (जैसे कौन सा अक्षर प्रतिबिंब में समान दिखाई देता है) और कौन सा नहीं। क्या आप कल्पना कर सकते हैं क्यों?

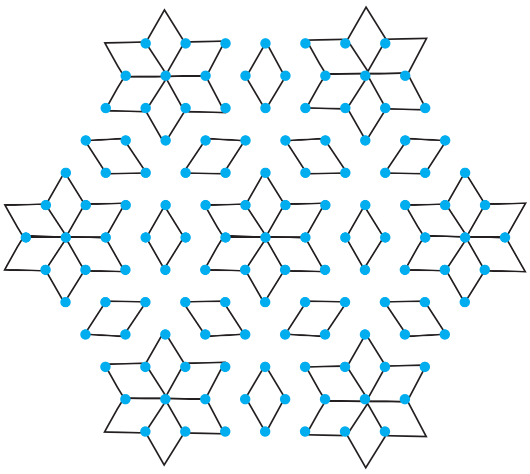


O E M N P H L T S V X के लिए प्रयास कीजिए।

रंगोली प्रतिरूप

कोलम और रंगोली हमारे देश में बहुत प्रसिद्ध हैं। कुछ नमूने यहाँ दिए गए हैं। उनमें सममिति के प्रयोग पर ध्यान दीजिए। इन प्रतिरूपों को जितना भी संभव हो सके इकट्ठा कीजिए और एक एलबम तैयार कीजिए।





इन प्रतिरूपों में सममिति की रेखाओं के साथ सममित भागों को ढूंढने का प्रयास कीजिए।

हमने क्या चर्चा की?

1. एक आकृति में सममिति की रेखा होती है यदि एक खींची गई रेखा आकृति को दो बराबर या समान भागों में बाँटती हो। यह रेखा सममिति की रेखा कहलाती है।
2. एक आकृति में कोई भी सममिति की रेखा नहीं, केवल एक सममिति की रेखा, दो सममिति की रेखाएँ या अनेक सममिति की रेखाएँ हो सकती हैं। यहाँ पर कुछ उदाहरण दिए गए हैं।

सममिति की रेखाओं की संख्या	*उदाहरण*
कोई सममित रेखा नहीं	एक विषमबाहु त्रिभुज
केवल एक सममित रेखा	एक समद्विबाहु त्रिभुज
दो सममित रेखाएँ	एक आयत
तीन सममित रेखाएँ	एक समबाहु त्रिभुज
अनेक सममित रेखाएँ	एक वृत्त

3. रैखिक सममिति परावर्तन से संबंधित होती है। जब हम परावर्तन के बारे में बात करते हैं तो हमें बायें↔दायें अभिमुख होने का ध्यान रखना चाहिए।

   सममिति का हमारे दैनिक जीवन में बहुत उपयोग होता है जैसे कला में, शिल्प विद्या में, वस्त्र प्रोद्यौगिकी, डिज़ाइन बनाना, ज्यामितीय तर्क, कोलम, रंगोली इत्यादि।