

لہریں (WAVES)



5168CH15

15.1 تعارف (INTRODUCTION)

پچھلے باب میں تہا ارتکا ز کرتی ہوئی اشیا کی حرکت کا مطالعہ کیا۔ ایسے نظام میں کیا ہوگا جو ایسی اشیا کا مجموعہ ہے؟ مادی واسطہ (medium material) ایسی مثال فراہم کرتا ہے۔ یہاں لچیلی قوتیں اجزائے ترکیبی کو ایک دوسرے سے باندھے رکھتی ہیں اور ایک جز کی حرکت دوسروں کی حرکت کو متاثر کرتی ہے۔ اگر آپ ساکت پانی کے تالاب میں ایک چھوٹی سی کنکری گرائیں تو پانی کی سطح مضطرب ہو جاتی ہے۔ یہ اضطراب ایک مقام پر محدود نہیں رہتا بلکہ ایک دائرے کی شکل میں باہر کی طرف رواں ہو جاتا ہے۔ اگر آپ تالاب میں کنکریاں ڈالنا جاری رکھیں، تو آپ جس نقطہ پر تالاب کی سطح میں اضطراب پیدا ہوا ہے، وہاں سے باہر کی طرف تیزی سے حرکت کرتے ہوئے دائرے دیکھیں گے۔ اس سے ایسا محسوس ہوتا ہے، جیسے نقطہ اضطراب سے باہر کی طرف پانی حرکت کر رہا ہے۔

اگر آپ مضطرب سطح پر کچھ کارک کے ٹکڑے رکھ دیں تو آپ دیکھیں گے کہ کارک کے ٹکڑے اوپر نیچے حرکت کرتے ہیں لیکن اضطراب کے مرکز سے دور نہیں جاتے۔ اس سے ظاہر ہوتا ہے کہ پانی کی کمیت، دائروں کے ساتھ، باہر کی طرف نہیں بہتی بلکہ ایک حرکت پیدا کرتا ہوا اضطراب پیدا ہوتا ہے۔ اسی طرح جب ہم بولتے ہیں تو آواز کی لہریں ہم سے باہر کی طرف حرکت کرتی ہیں، لیکن ان کے ساتھ واسطے کے ایک حصے سے دوسرے حصے میں کوئی ہوا کا بہاؤ نہیں ہوتا۔ ہوا میں پیدا ہوا خلل (اضطراب Disturbance) بہت کم واضح ہوتا ہے اور اسے صرف ہمارے کان یا مائیکروفون ہی معلوم کر پاتے ہیں۔ یہ نمونے جو حقیقی طبعی منتقلی یا مجموعی طور پر مادے کے بہاؤ کے بغیر حرکت کرتے ہیں، لہر (waves) کہلاتے ہیں۔ اس باب میں ہم ایسی ہی لہروں کا مطالعہ کریں گے۔

15.1 تعارف

15.2 عرضی اور طولی لہریں

15.3 ایک رواں لہر میں نقل کا رشتہ

15.4 ایک رواں لہر کی چال

15.5 لہروں کے انطباع کا اصول

15.6 لہروں کا انعکاس

15.7 ضربیں

15.8 ڈوپلر اثر

خلاصہ

قابل غور نکات

مشق

اضافی مشق

(15,1) (روشنی کی رفتار) $c = 299,792,458 \text{ m s}^{-1}$
 میکا نیکی لہروں کے برخلاف، برقی و مقناطیسی لہروں کو اپنی اشاعت کے لیے کسی واسطے کی ضرورت نہیں ہوتی۔ آپ ان لہروں کے بارے میں آئندہ مزید سیکھیں گے۔

مادی لہریں، متحرک الیکٹرانوں، پروٹانوں، نیوٹرانوں اور دوسرے بنیادی ذرات اور یہاں تک کہ ایٹموں اور مالیکیولوں سے منسلک ہیں۔ کیونکہ ہم عام طور سے ان سب کو مادے کے اجزائے ترکیبی تصور کرتے ہیں، اس لیے یہ لہریں مادی لہریں کہلاتی ہیں۔ فطرت کی کوانٹم میکا نیکی توضیح میں ان کی ضرورت پڑتی ہے، جس کے بارے میں آپ آئندہ سیکھیں گے۔ حالانکہ تصوراتی طور پر، یہ میکا نیکی یا برقی و مقناطیسی لہروں سے زیادہ تجریدی ہیں، ان کا استعمال جدید ٹکنالوجی کے بنیادی آلات میں کیا جانے لگا ہے۔ الیٹرانوں سے منسلک مادی لہریں، الیکٹران میکرسکوپس (electron microscopes) میں استعمال کی جاتی ہے۔

اس باب میں ہم میکا نیکی لہروں کا مطالعہ کریں گے، جن کو اپنی اشاعت کے لیے واسطہ (Medium) کی ضرورت ہوتی ہے۔

لہروں کا فنون لطیفہ اور ادب پر جمالیاتی اثر تو زمانہ قدیم سے دیکھنے میں آتا ہے، لیکن لہری حرکت (Wave motion) کا پہلا سائنسی تجزیہ سترہویں (17th) صدی میں کیا گیا ہے۔ لہری حرکت کی طبیعیات سے جڑے ہوئے کچھ اہم سائنسداں ہیں: کرسٹیان ہائی جین (Christiaan Huygens) (1629-1695)، روبرٹ ہوک اور اسحاق نیوٹن۔ لہروں کی طبیعیات کی تفہیم، اسپرنگ سے منسلک کمیتوں کے اتہزاز کی طبیعیات اور سادہ ہندولم کی طبیعیات کی تفہیم کے بعد ہوئی۔ پچھلے واسطوں میں لہریں ہارمونی اتہزازات سے نزدیکی طور پر منسلک ہیں۔ (تنبی ہوئی ڈوریاں، چھلے دار اسپرنگ، ہوا وغیرہ، پچھلے واسطوں کی مثالیں ہیں۔) ہم سادہ مثالوں کے ذریعے یہ تعلق واضح کریں گے۔

اسپرنگ کا ایک مجموعہ لیں، جس میں اسپرنگ ایک دوسرے سے اس طرح منسلک ہیں جیسے شکل 15.1 میں دکھایا گیا ہے کہ اگر ایک سرے کے اسپرنگ

ایک لہر میں، اطلاع اور توانائی، اشاروں (Signals) کی شکل میں، ایک نقطہ سے دوسرے نقطہ تک پہنچتی ہے۔ لیکن کوئی مادی شے حرکت نہیں کرتی ہماری تمام خبر رسائی، لہروں کے ذریعے سگنلوں کی ترسیل (Transmission) پر منحصر ہے۔ جب ہم کسی دور مقام پر اپنے دوست کو ٹیلیفون کرتے ہیں، ایک آواز کی لہر ہماری صوتی رگ سے ہمارا پیغام، ٹیلیفون تک لے جاتی ہے۔ وہاں ایک برقی سگنل پیدا ہوتا ہے دھات کے تار کے ساتھ حرکت کرتا ہوا آگے بڑھتا ہے۔ اگر فاصلہ بہت زیادہ ہوتا تو پیدا ہوئے برقی سگنل کو ایک روشنی کے سگنل یا برقی و مقناطیسی لہروں میں تبدیل کیا جاسکتا ہے اور نوری کیبل (Optical Cables) یا فضا سے، ممکنہ طور پر ایک ترسیل سیارچہ کے راستے سے، اس کی ترسیل کی جاسکتی ہے۔ سننے والے سرے پر اس برقی، یا روشنی کے سگنل یا برق و مقناطیسی لہر کو دوبارہ آواز کی لہروں میں بدلا جاتا ہے جو ٹیلیفون سے کان تک سفر کرتی ہیں۔

برقی و مقناطیسی لہروں کو اپنی اشاعت (Propagation) کے لیے واسطے کی ضرورت نہیں ہوتی۔ ہم جانتے ہیں کہ روشنی کی لہریں خلاء (Vacuum) سے گزر سکتی ہیں۔ ستاروں کے ذریعے خارج کی گئی روشنی، جو ہم سے سینکڑوں نوری برسوں کے فاصلے پر ہیں، بین النجمی فضا (inter-stellar space) سے گزر کر ہم تک پہنچتی ہے، جو کہ عملی طور پر خلاء ہے۔

جن لہروں سے ہمارا واسطہ پڑتا ہے، وہ بنیادی طور پر تین قسم کی ہیں: (a) میکا نیکی لہریں (b) برقی و مقناطیسی لہریں (c) مادی لہریں۔ میکا نیکی لہروں سے ہم سب سے بہتر طور پر واقف ہیں اس لیے کہ ان سے اکثر ہمارا سامنا ہوتا رہتا ہے۔ ان کی عام مثالیں ہیں: پانی کی لہریں، آواز کی لہریں، زلزلے کی لہریں وغیرہ۔ ان تمام لہروں کی کچھ مرکزی خاصیتیں ہیں: ان پر نیوٹن کے قانونوں کا اطلاق ہوتا ہے اور صرف مادی واسطے ہی میں پائی جاسکتی ہیں جیسے پانی، ہوا یا چٹان۔ برقی و مقناطیسی لہروں کی عام مثالیں ہیں: بصری (Visible) اور بالانفشی (Ultraviolet) روشنی، ریڈیائی لہریں (Radio waves) مائیکرو لہریں (Microwaves) اور x-rays شعاعیں (x-rays) وغیرہ۔ ہر برقی و مقناطیسی لہر، خلا میں یکساں چال C سے سفر کرتی ہے:

طرح متصل علاقے میں کثافت میں اضافہ کرتے ہیں یا داب پیدا کرتے ہیں۔ اس کے نتیجے میں، پہلے علاقے کی ہوا میں تلطیف (Rarefaction) ہوتی ہے۔ اگر ایک علاقہ مقابلاً تلطیف شدہ (Rarefied) ہو تو آس پاس کی ہوا اس علاقے میں تیزی سے آئے گی اور اس طرح متصل علاقے میں حرکت دے گی۔ اس طرح داب (Compression) اور تلطیف ایک علاقہ سے دوسرے علاقہ میں حرکت کرتے ہیں اور ہوا میں خلل کی اشاعت کو ممکن بناتے ہیں۔

ٹھوس اشیا کے لیے بھی اسی طرح کے دلائل پیش کیے جاسکتے ہیں۔ ایک قلمی (Crystalline) ٹھوس میں ایٹم یا ایٹموں کے گروپ ایک دوسری جالی (لیٹس Lattice) میں مرتب (arranged) ہوتے ہیں۔ ان میں، ہر ایٹم یا ایٹموں کا گروپ، انہیں گھیرے ہوئے ایٹموں کی قوتوں کی وجہ سے حالت توازن میں ہوتا ہے۔ ایک ایٹم کو منتقل کرنے سے دوسروں کو اپنی جگہ قائم رکھتے ہوئے، بہ حالی قوتیں پیدا ہوتی ہیں، بالکل اسپرنگ کی طرح۔ اس طرح ایک لیٹس کے ایٹموں کو ہم سروں کے نقطے مان سکتے ہیں جن کے جوڑوں کے درمیان اسپرنگ لگے ہیں۔

اس باب کے اگلے حصوں میں ہم لہروں کی خصوصی خاصیتوں سے بحث کرنے جا رہے ہیں۔

15.2 عرضی اور طولی لہریں

(TRANSVERSE AND LONGITUDINAL WAVES)

میکانیکی لہریں عرضی (Transverse) یا طولی (Longitudinal) ہو سکتی ہیں۔ یہ اس پر منحصر ہے کہ واسطے میں خلل یا منتقلی کی سمت اور لہر کی اشاعت کی سمت میں کیا رشتہ ہے۔ ان دونوں میں فرق کرنے کے لیے آئیے ایک سرے پر جڑی ہوئی ایک تنی ہوئی ڈوری کا رد عمل دیکھیں۔ اگر آپ اس ڈور کے آزاد سرے کو اوپر نیچے ایک جھٹکا دیں، تو جیسا کہ شکل 15.2 دکھایا گیا ہے، تو ڈوری پر ایک واحد ضرب (پلس Plus) کی شکل میں ایک لہر گزرتی ہے ہم فرض کرتے ہیں کہ پلس کے ناپ کے مقابلے میں ڈوری بہت لمبی ہے، اس لیے

کو اچانک کھینچ کر چھوڑ دیا جائے تو خلل (Disturbance) دوسرے سرے تک پہنچ جاتا ہے۔ کیا ہوا ہے؟ پہلے اسپرنگ کی توازن لمبائی میں بگاڑ (خلل) پیدا کیا گیا ہے۔ کیونکہ دوسرا اسپرنگ پہلے اسپرنگ سے منسلک ہے، اس لیے یہ بھی کھینچ جاتا ہے یا داب جاتا ہے، اور اس طرح دوسرے اسپرنگ بھی متاثر ہوتے ہیں۔ خلل ایک سرے سے دوسرے سرے تک حرکت کرتا ہے،

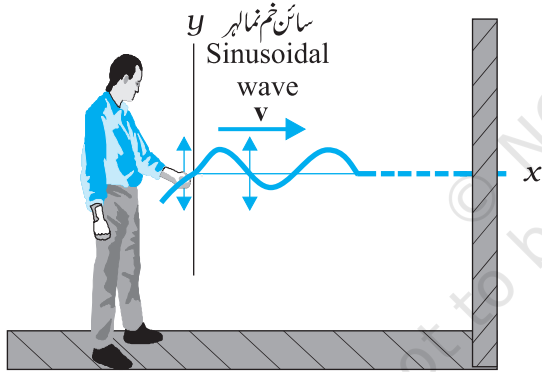


شکل 15.1: اسپرنگ کا ایک مجموعہ، جس میں اسپرنگ ایک دوسرے سے منسلک ہیں۔ سرے A کو اچانک کھینچ کر خلل پیدا کیا جاتا ہے، جو دوسرے سرے تک حرکت کرتا ہے۔

لیکن ہر اسپرنگ صرف چھوٹے ہتزازات کرتا ہے (اپنے مقام توازن کے گرد)۔ اس حالت کی ایک عملی مثال کے بہ طور ریلوے اسٹیشن پر کھڑی ہوئی (ساکت) ٹرین تصور کریں۔ ریل گاڑی کے مختلف ڈبے ایک دوسرے سے اسپرنگوں کے ذریعے جڑے ہوتے ہیں۔ جب ایک سرے پر انجن جوڑا جاتا ہے، تو وہ اپنے پیچھے والے ڈبے کو ایک دھکا لگاتا ہے، اور یہ دھکا ایک ڈبے سے دوسرے ڈبے تک ترسیل ہو جاتا ہے اور پوری ریل گاڑی مجسم طور پر منتقل نہیں ہوتی۔

آئیے اب ہوا میں آواز کی لہروں کی اشاعت کو دیکھیں۔ جب لہر ہوا سے گزرتی ہے، تو وہ ہوا کے ایک چھوٹے علاقے کو دباتی یا پھیلاتی ہے۔ اس سے اس علاقہ کی ہوا کی کثافت میں تبدیلی آ جاتی ہے فرض کیجیے $\delta\rho$ ۔ یہ تبدیلی دباؤ میں ایک تبدیلی δp پیدا کرتی ہے۔ دباؤ، کیوں کہ قوت فی اکائی رقبہ ہے، اس لیے اس خلل کے متناسب ایک بحالی قوت پیدا ہوتی ہے۔ بالکل ویسے ہی جیسے اسپرنگ میں ہوتا ہے۔ اس صورت میں توسیع (Extension) یا داب (Compression) جیسی مقدار کثافت کی تبدیلی ہے۔ اگر ایک علاقہ میں داب پیدا ہوتا ہے، تو اس علاقے کے مالکیول ایک دوسرے کے نزدیک آ جاتے ہیں اور وہ متصل علاقے میں حرکت کرنے کی کوشش کرتے ہیں، اس

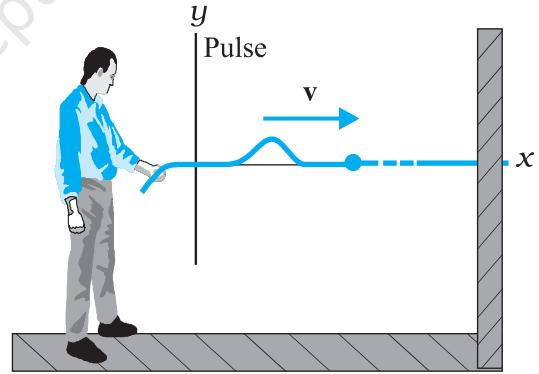
تو وقت کی کسی دی ہوئی ساعت پر، لہر کی شکل، سائن خم نما ہوگی، جیسا کہ شکل 15.3 میں دکھایا گیا ہے۔ دکھائی گئی لہر کی شکل سائن یا کوسائن منحنی جیسی ہے۔ شکل (15.3) میں دکھائی گئی لہروں کا مطالعہ دو طریقوں سے کیا جاسکتا ہے۔ ایک طریقہ تو یہ ہے کہ لہر کی شکلوں کی نگرانی، ان کے دائیں طرف حرکت کرتے ہوئے کی جائے یعنی کہ دی ہوئی ساعت وقت پر ڈوری کا فوری فوٹو لیا جائے۔ دوسرا متبادل طریقہ یہ ہے کہ ہم اپنی توجہ ڈوری کے کسی ایک خاص مقام پر مرکوز کر دیں اور اس نقطہ پر ایک جزی کی حرکت کی نگرانی کریں کہ جب اس سے ایک لہر گذرتی ہے تو وہ کیسے اوپر نیچے اہتزاز کرتا ہے۔ ہم دیکھیں گے کہ اس طرح اہتزاز کرتے ہوئے ڈوری کے ہر جزی کا نقل، لہر کے گذرنے کی سمت کے، عرضی سمت (یعنی کہ عمودی سمت) میں ہوگا، جیسا کہ شکل 15.3 میں دکھایا گیا ہے۔ ایسی لہر کو عرضی لہر (Transverse wave) کہتے ہیں۔



شکل 15.3: ایک سائن خم نما لہر ڈوری پر سے گذاری گئی ہے ڈوری کا ایک مخصوص جزی، لہر کے گذرنے کے ساتھ، مستقل اوپر نیچے حرکت کرتا ہے۔ یہ ایک عرضی لہر ہے۔

اب، ہم ایک لمبے ہوا بھرے ہوئے پائپ میں، ایک پسٹن کی حرکت کے ذریعے، لہروں کے پیدا ہونے کے دیکھتے ہیں، جیسا کہ شکل 15.4 میں دکھایا گیا ہے۔ اگر آپ پسٹن کو تیزی سے دائیں موڑیں اور پھر بائیں موڑیں، تو آپ پائپ میں سے دباؤ کی ایک پلس بھیج رہے ہیں۔ بائیں طرف پسٹن کو موڑنے سے، اس کے پاس کی ہوا کا دباؤ کم ہو جاتا ہے۔ اس کی وجہ سے اس کے بعد کے ہوا کے اجزا واپس بائیں طرف حرکت کرتے ہیں اور پھر دور

دوسرے سرے تک پہنچتے پہنچتے پلس کا اسراف (Dissipates) ہو جاتا ہے، اس لیے دوسرے سرے سے اس کے انعکاس کو نظر انداز کیا جاسکتا ہے۔ اس پلس کا تشکیل پانا اور اس کی اشاعت اس لیے ممکن ہے کیونکہ ڈوری میں تناؤ ہے۔ جب آپ رسی کے اپنی طرف کے سرے کو اوپر کھینچتے ہیں تو یہ سراسر، رسی کے متصل حصے کو اوپر کی طرف کھینچنا شروع کر دیتا ہے، کیونکہ رسی کے ان دونوں حصوں کے درمیان تناؤ کام کر رہا ہے۔ جیسے متصل حصہ اوپر کی طرف حرکت شروع کرتا ہے یہ اس کے بعد کے حصے کو اوپر کھینچنا شروع کرتا ہے اور اسی طرح اور۔ اس دوران آپ رسی کے اپنی طرف کے سرے کو نیچے جھٹکا دے چکے ہوتے ہیں۔ جیسے باری باری سے ہر حصہ اوپر کی طرف حرکت کرنا شروع کرتا ہے وہ اپنے ان پڑوسی حصوں کے ذریعے دوبارہ نیچے کی طرف کھینچتا ہے جو پہلے ہی نیچے کی طرف حرکت شروع کر چکے ہوتے ہیں۔ اس کا کل نتیجہ یہ ہے کہ ڈوری کی شکل میں ایک بگاڑ (distortion) پیدا ہوتا ہے اور یہ بگاڑ (پلس Plus) ڈوری پر رفتار v سے حرکت کرتا ہے۔



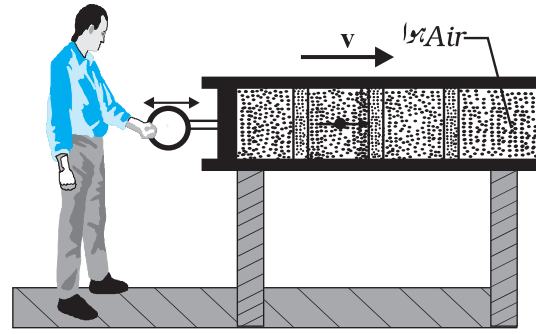
شکل 15.2: ایک تنی ہوئی ڈوری پر سے ایک واحد پلس بھیجی گئی ہے۔ ڈوری کا ایک مخصوص جزی (جیسے کہ نقطے سے نشان زد کیا گیا حصہ) پلس کے اس جزی سے گزرنے پر پہلے اوپر اور پھر نیچے حرکت کرتا ہے۔ جزی کی حرکت اس سمت پر عمود ہے، جس میں لہر حرکت کر رہی ہے۔

اگر آپ اپنی طرف کے سرے کو مستقل اوپر نیچے حرکت دیتے رہیں تو ڈوری پر سے ایک مسلسل لہر، v رفتار سے، گذرتی ہے۔ لیکن اگر آپ کے ہاتھ کی حرکت، وقت کا سائن خم نما، تفاعل، (sinusoidal function of time) ہے

صورتوں میں، یہ لہر خلل ہے جو ایک سرے سے دوسرے سرے تک حرکت کرتا ہے، وہ مادہ نہیں جس میں لہر سے اشاعت ہوتی ہے۔

عرضی لہروں میں ذرات کی حرکت، لہر کی اشاعت کی سمت کی عمودی سمت میں ہوتی ہے۔ اس لیے جیسے لہر آگے بڑھتی ہے، واسطہ کے ہر جز میں ایک تحریقی بگاڑ (Shearing Strain) پیدا ہوتا ہے۔ اس لیے عرضی لہروں کی صرف انہیں واسطوں میں اشاعت ہو سکتی ہے جو تحریقی ذرر (Shearing Stress) کو برداشت کر سکتے ہیں، جیسے ٹھوس اشیاء میں اور سیالوں میں نہیں۔

سیال اور ٹھوس اشیاء دابی بگاڑ (Compressive Strain) کو برداشت کر سکتی ہیں، اس لیے طویل موجیں ہر یکیلے واسطے میں سے گذر سکتی ہیں۔ مثلاً ایک فولاد کی چھڑ کو اگر بہ طور واسطہ لیا جائے تو اس میں سے طویل اور عرضی دونوں لہریں گذر سکتی ہیں جب کہ ہوا صرف طویل موجوں کو برقرار رکھ سکتی ہے۔ پانی کی سطح پر پیدا ہونے والی لہریں دو قسم کی ہوتی ہیں: شعری (Capillary) لہریں اور زمینی کشش لہریں (gravity waves) اول الذکر، کافی کم طول لہر، چند سینٹی میٹر سے زیادہ نہیں، کے حلقے (Ripple) ہیں اور بحالی قوت جو انہیں پیدا کرتی ہے، وہ پانی کا سطحی تناؤ ہے۔ زمینی کشش لہر کی طول لہر کئی میٹر سے لے کر کئی سو میٹر تک کی سعت میں ہو سکتی ہے۔ انہیں پیدا کرنے والی بحالی قوت ہے زمینی کشش کا کھچاؤ جو پانی کی سطح کو اس کی کم ترین اونچائی پر رکھتا ہے۔ ان لہروں میں ذرات کے ابتر از صرف سطح تک ہی محدود نہیں ہوتے بلکہ کم ہوتی ہوئی سعت کے ساتھ، پینڈے تک پہنچتے ہیں۔ پانی کی لہروں میں، ذرات کی حرکت پیچیدہ ہوتی ہے: یہ صرف اوپر نیچے ہی حرکت نہیں کرتے بلکہ آگے۔ پیچھے بھی حرکت کرتے ہی۔ ایک سمندر میں اٹھنے والی موجیں (لہریں)، طویل اور عرضی، دونوں قسم کی لہروں کا مجموعہ ہیں۔ سُمانی لہریں ان کی مثال ہیں۔ یہ دیکھا گیا ہے کہ عام طور سے عرضی اور طویل لہریں یکساں واسطے میں سے مختلف چالوں سے گذرتی ہیں۔



شکل 15.4: ایک پسٹن کو آگے پیچھے حرکت کر کے، ایک ہوا سے بھرے ہوئے پائپ میں ایک آواز کی لہر پیدا کی جاتی ہے۔ ہوا کے ایک جز کے ابتر از اس سمت کے متوازی ہیں، جس میں لہر حرکت کر رہی ہے۔ یہ لہر ایک طولی لہر ہے۔

کے اجزا بھی ایسا ہی کرتے ہیں۔ اس لیے ہوا کی حرکت اور ہوا کے دباؤ میں تبدیلی دائیں طرف پائپ میں بہ طور پس حرکت کرتے ہیں۔ اگر آپ پسٹن کو ایک سادہ ہارمونی طرز سے دھکیلیں اور کھینچیں تو پائپ میں سے ایک سائن نم لہر گذرے گی۔ یہ نوٹ کیا جاسکتا ہے کہ ہوا کے اجزا کی حرکت، لہر کی اشاعت کی سمت کے متوازی ہے۔ ایسی حرکت طولی (Longitudinal) کہلاتی ہے اور اس لیے پیدا ہونی لہر طولی لہر کہلاتی ہے۔ ہوا میں پیدا ہونے والی آواز کی لہریں، ایسی ہی دباؤ لہریں ہیں، اور اس لیے طولی خاصیت کی ہیں۔

مختصراً، عرضی لہروں میں واسطے کے اجزائے ترکیبی، لہر کی اشاعت کی سمت کی عمودی سمت میں ابتر از کرتے ہیں اور طویل لہروں میں وہ لہر کی اشاعت کی سمت میں ابتر از کرتے ہیں۔

ایک لہر، چاہے عرضی ہو یا طولی، رواں (travelling or progressive) لہر کہلاتی ہے، اگر وہ واسطے میں ایک نقطہ سے دوسرے نقطہ تک جاتی ہے۔ ایک رواں لہر اور ایک مقیم (standing or stationary) لہر میں فرق کرنا ہوگا۔ (دیکھیے حصہ 15.7)۔ شکل 15.3 میں عرضی لہریں ڈوری کے ایک سرے سے دوسرے تک جاتی ہیں، جب کہ 15.4 میں طویل لہریں پائپ کے ایک سرے سے دوسرے سرے تک جاتی ہیں۔ ہم پھر نوٹ کرتے ہیں کہ دونوں

مثال 15.1: نیچے لہریں حرکت کی کچھ مثالیں دی گئی ہیں۔ ہر دی ہوئی صورت میں بتائیے کہ لہریں حرکت، عرضی ہے، طویل ہے یا دونوں کا مجموعہ ہے۔

$$y(x, t) = a \sin(kx - \omega t + \phi) \quad (15.2)$$

اسی طرح cosine تفاعل یا Sine اور Cosine تفاعلات کا ایک خطی مجموعہ بھی لیا جاسکتا ہے۔

$$y(x, t) = A \sin(kx - \omega t) + B \cos(kx - \omega t), \quad (15.3) \text{ جیسے}$$

تب مساوات (15.2) میں

$$a = \sqrt{A^2 + B^2}, \quad \phi = \tan^{-1} \left(\frac{B}{A} \right)$$

مساوات (15.2) میں ظاہر کیا گیا تفاعل مقام کو آرڈی نیٹ x اور وقت t میں دوری ہے۔ یہ x -محور پر ایک عرضی لہر کو ظاہر کرتا ہے۔ کسی بھی وقت t پر لہر کی شکل بتاتا ہے اور ظاہر کرتا ہے کہ لہر کیسے آگے بڑھتی ہے۔ مساوات (15.2) میں دیے ہوئے جیسے تفاعل، x -محور کی مثبت سمت میں حرکت کر رہی ایک رواں لہر (Progressive wave) کو ظاہر کرتے ہیں۔ دوسری طرف ایک تفاعل:

$$y(x, t) = a \sin(kx + \omega t - \phi) \quad (15.4)$$

x -محور کی منفی سمت میں حرکت کر رہی لہر کو ظاہر کرتا ہے (دیکھیے حصہ 15.4)۔ مساوات (15.2) میں چار مقداروں (پیرامیٹروں) ω, ϕ, a, k اور w کا سیٹ، ایک ہارمونی لہر کو مکمل طور پر ظاہر کرتا ہے۔ ان پیرامیٹروں کے نام شکل 15.5 میں دکھائے گئے ہیں۔ اور بعد میں ان کی تعریف کی گئی ہے۔

$y(x, t) = \overbrace{a}^{\text{سعت}} \sin \left(\overbrace{kx - \omega t + \phi}^{\text{فیز}} \right)$
$\uparrow$ آغازی فیز زاویہ $\uparrow$ زاوی تعدد لہر عدد $\uparrow$ زاوی لہر عدد

شکل 15.5: ایک رواں لہر کے لیے، مساوات (15.2) کی مقداروں کے نام

مساوات (15.2) کی مقداروں کی سمجھنے کے لیے، آئیے شکل 15.6 میں دکھائے گئے گراف دیکھیں۔ یہ وقت t کی 5 مختلف قدروں کے لیے مساوات (15.2) کے گراف ہیں، جبکہ لہر x -محور کی مثبت سمت میں حرکت رہی ہے۔ ایک لہر پر، از حد مثبت نقل کا نقطہ، جس کی تیر کے نشان کے ذریعے

- (a) ایک طویل اسپرنگ میں اسپرنگ کے ایک سرے کو دائیں یا بائیں منتقل کرنے سے پیدا ہونے والے پیچ کی حرکت۔
- (b) ایک رقیق سے بھرے استوانے میں، اس کے پسٹن کو آگے پیچھے حرکت دینے سے پیدا ہونے والی لہریں۔
- (c) پانی میں تیرتی ہوئی موٹر بوٹ کے ذریعے پیدا کی گئی لہریں۔
- (d) ایک ارتعاش کرتے ہوئے کوارٹز کے قلم (Crystal) کے ذریعے ہوا میں پیدا کی گئی بالاصوتی لہریں۔

جواب

- (a) عرضی اور طولی
- (b) طولی
- (c) عرضی اور طولی
- (d) طولی

15.3 ایک رواں لہر میں نقل کا رشتہ

(DISPLACEMENT RELATION IN A PROGRESSIVE WAVE)

ایک واسطے میں ایک لہر کی حرکت (اور واسطے کے کسی جز ترکیبی کی حرکت) کو بیان کرنے کے لیے، ہمیں ایک ایسے تفاعل کی ضرورت ہے جو وقت کی ہر ساعت پر، لہر کی مکمل طور پر شکل دے سکے۔ مثال کے طور پر، ایک ڈوری پر بنی لہر کو بیان کرنے کے لیے (اور اس کی لمبائی کے کسی جز کی حرکت کو بیان کرنے کے لیے) ہمیں ایک ایسے رشتے کی ضرورت ہے جو ایک مخصوص مقام پر ایک جز کے نقل کو بہ طور تفاعل وقت بیان کر سکے اور ساتھ ہی، دی ہوئی ساعت وقت پر ڈوری کی لمبائی کے مختلف عناصر کے ارتعاش کی حالت بھی بیان کر سکے۔ ایک سائن خم نما لہر کے لیے، جیسا شکل (15.3) میں دکھایا گیا ہے، یہ تفاعل، مکان (Space) اور زماں (Time) دونوں میں دوری ہونا چاہیے۔ فرض کیجیے، $y(x, t)$ مقام x اور وقت t پر جز کا عرضی نقل ظاہر کرتا ہے۔ جیسے جیسے لہر، ڈوری کے بعد کے جزیوں سے گذرتی ہے، یہ جز y -محور کے متوازی ابتر کرتے ہیں۔ کسی بھی دیے ہوئے وقت t پر مقام x کے جز کا نقل y دیا جاتا ہے:

15.3.1 سعت اور فیز (Amplitude & Phase)

شکل 15.5 یا شکل 15.6 میں دکھائی گئی جیسی لہر کی سعت 'a' اجزا کے مقامات توازن سے از حد نقل کی عددی قدر ہے جو لہر کے ان پر سے گزرنے میں ہوتا ہے۔ اسے شکل 15.6(a) میں دکھا گیا گیا ہے۔ کیونکہ a ایک عددی قدر ہے، یہ ایک مثبت مقدار ہے، چاہے نقل منفی بھی ہو۔

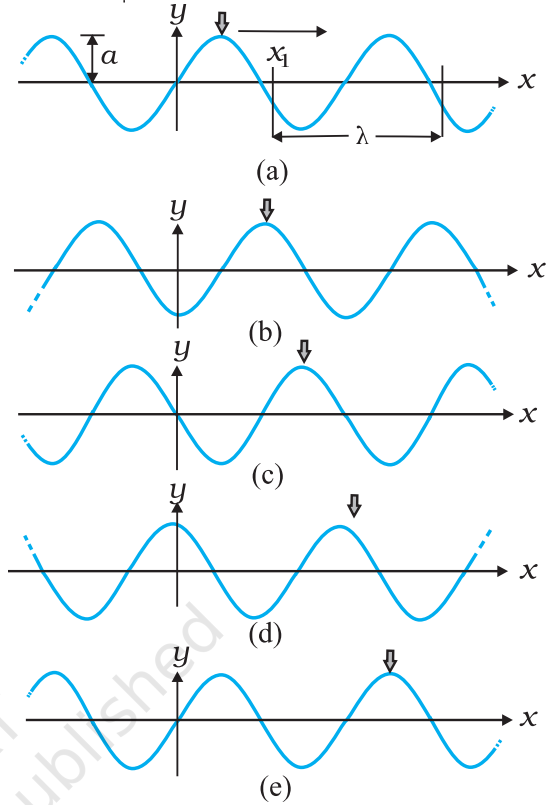
لہر کا فیز، مساوات (15.2) میں، $\sin(kx - \omega t + \phi)$ رکن حاصل زاویہ $(kx - \omega t + \phi)$ ہے۔ یہ لہر کے ایک ڈوری کے جز پر ایک خاص مقام x سے گزرنے پر حرکت کی حالت بیان کرتا ہے۔ یہ وقت t کے ساتھ خطی طور پر تبدیل ہوتا ہے اور +1 اور -1 کے درمیان ابتراز کرتا ہے۔ اس کی منتہائی مثبت قدر +1 اس جز سے گزرتی ہوئی لہر کے فراز سے مطابقت رکھتی ہے، تب مقام x پر y کی قدر a ہے۔ اس کی منتہائی منفی قدر -1، اس جز سے گزرتی ہوئی لہر کے نشیب سے مطابقت رکھتی ہے، تب مقام x پر y کی قدر -a ہے۔ اس طرح، سائن تفاعل اور ایک لہر کا تابع وقت فیز، ڈوری کے ایک جز کے ابتراز سے مطابقت رکھتے ہیں اور لہر کی سعت سے جز کے نقل کی انتہائی قدروں کا تعین ہوتا ہے۔ مستقلہ ϕ ، آغازی فیز زاویہ کہلاتا ہے۔ ϕ کی قدر جز کی آغازی (t=0) نقل اور رفتار (فرض کیجئے x=0 پر) سے معلوم کی جاتی ہے۔

ہم مبدے (x=0) اور آغازی ساعت (t=0) کو ہمیشہ اس طرح منتخب کر سکتے ہیں کہ $\phi=0$ ہو۔ اگر مساوات (15.2) میں $\phi=0$ رکھا جائے تو بھی مساوات کی عمومیت میں کوئی کمی نہیں آتی۔

15.3.2 طول لہر اور زاویائی لہر عدد

(Wavelength and angular wave number)

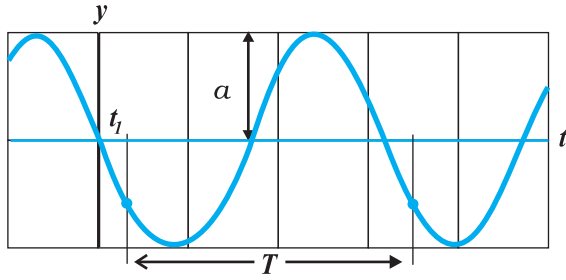
ایک لہر کا طول لہر، لہر کی شکل کے لگاتار دہرائے جانے کے درمیان فاصلہ ہے (لہر کی اشاعت کی سمت کے متوازی)۔ یہ دو لگاتار نشیب یا فراز کے درمیان یا لہر کی حرکت کے یکساں فیز والے دو لگاتار نقطوں کے درمیان، کم ترین فاصلہ



شکل 15.6: ایک x-محور کی مثبت سمت میں حرکت کرتی ہوئی لہر کے لیے، وقت t کی 5 مختلف قدروں پر، مساوات (15.2) کے گراف

نشان دہی کی گئی ہے، فراز (Crest) کہلاتا ہے اور از حد منفی نقل کا نقطہ نشیب (Trough) کہلاتا ہے۔ لہر کے آگے بڑھنے کی نشاندہی لہر کے فراز پر بنائے گئے چھوٹے تیر کی دائیں طرف حرکت کے ذریعے کی گئی ہے۔ جیسے جیسے ہم ایک گراف سے دوسرے گراف پر جاتے ہیں، مختصر تیر، لہر شکل کے ساتھ دائیں طرف حرکت کرتا ہے لیکن ڈوری صرف y-محور کے متوازی حرکت کرتی ہے۔ یہ دیکھا جاسکتا ہے کہ ہم جیسے جیسے گراف (a) سے (e) کی طرف بڑھتے ہیں، ڈوری کا ایک مخصوص جز، تبدیلیوں کے ایک مکمل سائیکل سے گذرتا ہے یا ایک پورا ابتراز مکمل کرتا ہے۔ اس وقفہ وقت کے دوران، مختصر تیر کے نشان یا لہر نے x-محور پر ایک خصوصی فاصلہ طے کیا ہے۔

اب ہم مندرجہ بالا 5 گرافوں کے تناظر میں، مساوات (15.2) کی مختلف مقداروں کی، جو شکل 15.5 میں دکھائی گئی ہیں، تعریف کرتے ہیں۔



شکل 15.7: ڈوری کے جز کے نقل کا، $x=0$ پر، بہ طور تفاعل وقت گراف، جب کہ شکل 14.6 کی سائن خم نما لہر اس جز سے گذرتی ہے۔ سمت a کی نشاندہی کی گئی ہے۔ ایک نئے قاعدہ وقت t_1 سے مخصوص دور T کی بھی نشاندہی کی گئی ہے۔

آپ ڈوری کی نگرانی کریں، تو آپ دیکھیں گے کہ اس مقام پر ڈوری جز، سادہ ہارمونی حرکت میں، اوپر نیچے حرکت کرتا ہے، جو $x=0$ کے ساتھ، مساوات (15.2) سے دی جاتی ہے۔

$$y(0,t) = a \sin(-\omega t) \\ = -a \sin \omega t$$

شکل (15.7) اس مساوات کا گراف ہے، یہ لہر کی شکل نہیں دکھاتا۔ ایک لہر کے اهتزاز کے دور T کی تعریف اس طرح کی جاتی ہے کہ یہ کسی بھی ڈوری کے جز کے ذریعے ایک مکمل اهتزاز میں لیا گیا وقت ہے۔ شکل 15.7 میں ایک مخصوص دور کی نشاندہی کی گئی ہے۔ مساوات (15.2) کو اس وقفہ وقت کے دونوں سروں پر استعمال کرتے ہوئے، ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$-a \sin \omega t = -a \sin \omega(t_1 + T) \\ = -a \sin (\omega t_1 + \omega T)$$

یہ تب صادق ہو سکتا ہے، جب ωt کی کم ترین قدر 2π ہو، یا اگر

$$\omega = 2\pi/T \quad (15.7)$$

لہر کا زاویائی تعدد کہلاتا ہے۔ اس کی SI اکائی: rad s^{-1} ہے۔ شکل 15.6 میں ایک رواں لہر کے گرافوں کو دوبارہ دیکھیے۔ دو لگاتار گرافوں کے درمیان وقفہ وقت $T/4$ ہے۔ اس لیے پانچویں گراف تک آتے آتے، ڈوری کا ہر جز ایک مکمل اهتزاز کر چکا ہے۔

* یہاں پر بھی ریڈین کو چھوڑا جا سکتا ہے اور اکائی صرف m^{-1} لکھی جا سکتی ہے۔ اس لیے k ، 2π ضرب، ان لہروں کی تعداد کو ظاہر کرتا ہے (یا کل فیز کے فرق کو) جو اکائی لمبائی میں سما سکتی ہے اس لیے SI اکائی m^{-1} ہے۔

ہے۔ ایک مخصوص طول لہر کی نشاندہی شکل (a) 15.6 میں کی گئی ہے۔ جو $t=0$ اور $\phi=0$ کے لیے مساوات (15.2) کی ترسیم (Plot) ہے۔ اس صورت میں، مساوات (15.2) ہو جاتی ہے۔

$$y(x,0) = a \sin kx \quad (15.5)$$

تعریف کے مطابق، اس طول موج کے دونوں سروں پر، نقل y یکساں ہے۔ یعنی کہ $x = x_1 + \lambda$ اور $x = x_1$ پر، اس لیے مساوات (15.2) کے ذریعے

$$a \sin kx_1 = a \sin k(x_1 + \lambda) \\ = a \sin (kx_1 + k\lambda)$$

یہ شرط صرف اسی وقت مطمئن ہو سکتی ہے جب

$$k\lambda = 2\pi$$

جہاں، $n=1,2,3,\dots$ ، کیونکہ λ کی تعریف اس طرح کی گئی ہے کہ یکساں فیروالے نقطوں کے درمیان کم ترین فاصلہ ہے، اس لیے $n=1$ اور

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (12.6)$$

k اشاعت مستقلہ (Propagation Constant) یا زاویائی لہر عدد

کہلاتا ہے، اس کی SI اکائی ریڈین فی میٹر یا (rad m^{-1}) ہے۔

یہ نوٹ کیا جاسکتا ہے کہ شکل (15.6) میں ہم جیسے جیسے ایک ترسیم سے دوسری ترسیم کی طرف جاتے ہیں، لہر اپنی دائیں طرف فاصلہ $\lambda/4$ سے حرکت کرتی ہے۔ اس لیے پانچویں ترسیم پر پہنچ کر، لہر دائیں طرف فاصلہ λ سے حرکت کر چکی ہے۔

15.3.3 دور، زاویائی تعدد اور تعدد

(Period, angular frequency and frequency)

شکل 15.7 میں، مساوات (15.2) سے دیے جانے والے نقل y برخلاف t گراف کو، ڈوری کے کسی مقام پر، جسے $x=0$ لیا گیا ہے، دکھایا گیا ہے، اگر

پھر ہم طول لہر λ اور k کے بیچ رشتہ، مساوات (15.6) سے لکھتے ہیں۔

$$\lambda = 2\pi/k$$

$$= \frac{2\pi}{80.0 \text{ m}^{-1}}$$

$$= 7.85 \text{ cm}$$

(c) اب T اور ω میں رشتہ لکھتے ہیں:

$$T = 2\pi/\omega$$

$$= \frac{2\pi}{3.0 \text{ s}^{-1}}$$

$$= 2.09 \text{ s}$$

اور

$$\nu = 1/T = 0.48 \text{ Hz}$$

$$x = 30.0 \text{ cm} \text{ اور } t = 20 \text{ s} \text{ پر نقل } y \text{ دیا جاتا ہے}$$

$$y = (0.005 \text{ m}) \sin (80.0 \times 0.3 - 3.0 \times 20)$$

$$= (0.005 \text{ m}) \sin (-36 + 12\pi)$$

$$= (0.005 \text{ m}) \sin (1.699)$$

$$= (0.005 \text{ m}) \sin (97^\circ) \approx 5 \text{ mm}$$

ایک لہر کے تعدد کی تعریف بہ طور $\frac{1}{T}$ کی جاتی ہے اور اس کا زاویائی تعدد

سے رشتہ ہے:

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \quad (15.8)$$

یہ ایک ڈوری کے جز کے ذریعے کیے گئے ہتزازات کی تعداد فی اکائی وقت ہے، جو کہ وہ جز اس سے لہر کے گزرنے کے دوران کرتا ہے۔ یہ عام طور سے ہرٹز میں ناپی جاتی ہے۔

اور پردی ہوئی بحث میں ڈوری پر سے گذرتی ہوئی لہر یا ایک عرضی لہر کا حوالہ دیا گیا ہے۔ ایک طولی لہر میں، واسطے کے ایک جز کا نقل، لہر کی اشاعت کی سمت کے متوازی ہوتا ہے۔ مساوات (15.2) میں، ایک طولی موج کے لیے نقل تفاعل لکھا جائے گا۔

$$s(x, t) = a \sin (kx - \omega t + \phi) \quad (15.9)$$

جہاں $s(x, t)$ ، واسطے کے ایک جز کا، مقام x اور وقت t پر، لہر کی اشاعت کی سمت میں، نقل ہے۔ مساوات (15.9) میں a نقل کی سعت ہے، باقی مقداروں کے وہی معنی ہیں جو عرضی لہر کی صورت میں ہیں سوائے اس کے کہ نقل تفاعل $y(x, t)$ کی جگہ $s(x, t)$ ہے۔

15.4 ایک رواں لہر کی چال

(THE SPEED OF A TRAVELLING WAVE)

آئیے ایک ڈوری پر سے گذرتی ہوئی لہر، جو مساوات (15.2) سے دی جاتی ہے، کی اشاعت کا معائنہ کریں۔ لہر x کی مثبت سمت میں رواں ہے۔ ہم دیکھتے ہیں کہ ایک خاص مقام x پر ڈوری کا ایک جز، اوپر نیچے، بہ طور تفاعل وقت، حرکت کرتا ہے، لیکن لہر کی شکل دائیں جانب بڑھتی ہے۔ دو مختلف اوقات t اور $t + \Delta t$ پر جہاں Δt بہت چھوٹا ہے، ڈوری کے مختلف اجزا کا نقل، شکل 15.8 میں دکھایا گیا ہے۔ (فیز زاویہ ϕ ، صفر لیا گیا ہے)۔ یہ دیکھنے میں آتا ہے کہ اس وقفہ وقت کے دوران مکمل لہر نمونہ، x کی مثبت سمت میں، ایک فاصلہ x سے حرکت کرتا ہے۔ اس لیے، لہر دائیں طرف حرکت کر رہی ہے۔ x کی مثبت سمت میں نسبت $\Delta x / \Delta t$ ، لہر کی چال v ہے۔

مثال 15.2: ایک ڈوری سے گذر رہی لہر، بیان کی جاتی ہے

$$y(x, t) = 0.005 \sin 80.0(x - 3.0t)$$

SI اکائیوں میں ہیں۔

$$(0.005 \text{ m}, 3.0 \text{ rad s}^{-1}, 80.0 \text{ rad m}^{-1})$$

حساب لگائیے (a) لہر کی سعت (b) طول لہر (c) دور اور تعدد۔ اور
ت = 20 s، x = 30.0 cm پر لہر کے نقل y کا بھی حساب لگائیے۔

جواب: اس نقل مساوات کا مساوات (15.2) سے مقابلہ کرنے پر:

$$y(x, t) = a \sin (kx - \omega t)$$

ہمیں حاصل ہوتا ہے:

$$0.005 \text{ m} = 5 \text{ mm} \text{ (a) لہر کی سعت}$$

$$\omega = 3.0 \text{ s}^{-1} \text{ (b) زاویائی تعدد، } k = 80.0 \text{ m}^{-1} \text{ زاویائی لہر عدد}$$

یا

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k} = v \quad (15.12)$$

مساوات (15.6) تا مساوات (15.8) استعمال کرتے ہوئے، ہم لکھ سکتے ہیں:

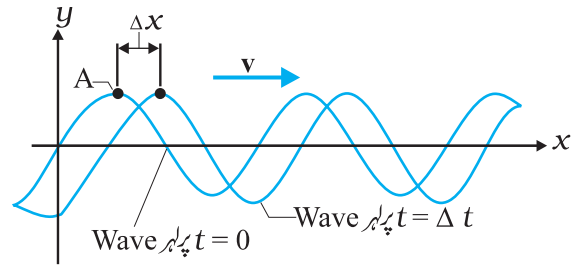
$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T} = \lambda \nu \quad (15.12)$$

مساوات (15.11) ایک عمومی رشتہ ہے جو تمام رواں لہروں کے لیے جائز ہے۔ یہ صرف اتنا بیان کرتا ہے کہ لہر ابتراز کے ایک دور میں ایک طول لہر کا فاصلہ طے کرتی ہے۔ لہر کی چال اس کی طول لہر اور تعدد سے مساوات (15.12) کے ذریعے منسلک ہے، لیکن اس کا تعین واسطے کی خاصیتوں کے ذریعے ہوتا ہے۔ اگر لہر ایک واسطے، جیسے ہوا، پانی، فولاد یا ایک تنی ہوئی ڈوری، سے گذرتی ہے تو اسے اس واسطے سے گذرتے ہوئے اس واسطے کے ذرات میں ابتراز پیدا کرنا چاہیے۔ اس لیے واسطے میں کمیت اور چمک ہونی ضروری ہے۔ اس لیے واسطے کی خطی کمیت کثافت (یا خطی نظاموں جیسے ایک تنی ہوئی ڈوری کے لیے کمیت فی اکائی لمبائی) اور چمکیلی خاصیتیں یہ متعین کرتی ہیں کہ لہر اس واسطے میں کتنی تیزی سے گذر سکتی ہے۔ اس کے برعکس، ان خاصیتوں کی شکل میں، واسطے میں لہر کی چال کا حساب لگانا ممکن ہونا چاہیے۔ اس باب کے آگے آنے والے تحت حصوں میں ہم کچھ مخصوص واسطوں میں میکانیکی لہروں کی رفتار کے لیے مخصوص ریاضیاتی عبارتیں حاصل کریں گے۔

15.4.1 ایک تنی ہوئی ڈوری پر ایک عرضی لہر کی چال

(Speed of a Transverse wave on stretched string)

ایک ڈوری پر عرضی لہر کی چال دو عوامل پر منحصر ہے: (i) خطی کمیت کثافت یا کمیت فی اکائی لمبائی، μ اور (ii) تناؤ T ۔ کمیت کی ضرورت اس لیے ہے تاکہ حرکی توانائی ہو اور تناؤ کے بغیر، ڈوری میں کسی خلل کی اشاعت ممکن نہیں ہے۔ ایک تنی ہوئی رسی پر لہر کی چال اور مندرجہ بالا دونوں عوامل میں رشتہ بالکل درست طور پر مشتق کرنا اس کتاب کے دائرہ سے باہر ہے۔ اس لیے ہم ایک



شکل 15.8: مساوات (15.2) کے وقت کی دو سماعتوں، پہلے $t=0$ اور پھر $t=\Delta t$ پر گراف، جن میں وقفہ Δt کا فرق ہے۔ جیسے لہر v سے دائیں طرف حرکت کرتی ہے پورا منحنی، Δt کے دوران فاصلہ Δx سے منتقل ہوتا ہے۔ نقطہ A، لہر پر سفر کرتا ہے، لیکن ڈوری کا جز صرف اوپر-نیچے حرکت کرتا ہے۔

جیسے لہر حرکت کرتی ہے۔ (شکل 15.8)، حرکت کرتی ہوئی لہر (گراف) کا ہر نقطہ، لہر کا ایک مخصوص فیظ ظاہر کرتا ہے اور اپنے نقل کو برقرار رکھتا ہے۔ یہ نوٹ کیا جاسکتا ہے کہ ڈوری کے نقطے اپنے نقل کو برقرار نہیں رکھتے جب کہ لہر کے نقطے برقرار رکھتے ہیں۔ آئیے ایک نقطہ جیسے A لیں، جس کی نشاندہی لہر کے فزائپر کی گئی ہے۔ اگر ایک نقطہ، جیسے A، حرکت کرتے ہوئے اپنے نقل کو برقرار رکھتا ہے تو مساوات (15.2) سے اخذ کیا جاسکتا ہے کہ یہ تیب ہی ممکن ہے جب کہ حامل زاویہ مستقل ہے۔ اس لیے، یہ اخذ ہوتا ہے کہ

$$kx - \omega t = \text{مستقلہ} \quad (15.10)$$

نوٹ کریں کہ حامل زاویہ میں x اور t دونوں تبدیل ہو رہے ہیں، اس لیے حامل زاویہ کو مستقل رکھنے کے لیے اگر t بڑھتا ہے تو x کو بھی لازمی طور پر بڑھنا چاہیے۔ یہ تیب ہی ممکن ہے جب لہر مثبت x -سمت میں حرکت کر رہی ہو۔ لہر رفتار v معلوم کرنے کے لیے، ہم مساوات (15.10) کا t کی مناسبت سے تفرق (Differential) معلوم کرتے ہیں:

$$\frac{d}{dt} (kx - \omega t) = 0$$

$$یا$$

$$k \frac{dx}{dt} - \omega = 0$$

اس لیے، اگر v, T, μ کے تابع ہے، تو ان کے درمیان رشتہ ہونا چاہیے:

$$v = C \sqrt{\frac{T}{\mu}} \quad (15.13)$$

یہاں C ایک غیر ابعادی مستقلہ ہے جو ابعادی تجزیہ سے حاصل نہیں کیا جاسکتا۔ زیادہ سخت قاعدوں پر مبنی طریقہ اختیار کر کے یہ ثابت کیا جاسکتا ہے کہ C کی قدر واقعی 1 ہے۔ اس لیے، ایک تنی ہوئی رسی میں عرضی لہر کی چال ہے:

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \quad (15.14)$$

مساوات (15.14) ہمیں بتاتی ہے

کہ ایک تنی ہوئی مثالی ڈوری میں ایک لہر کی رفتار صرف ڈوری کے تناؤ اور اس کی خطی کمیت کثافت کے تابع ہے اور لہر کے تعدد کے تابع نہیں ہے۔

لہر کا تعدد اس وسیلے (Source) سے طے ہوتا ہے، جو لہر پیدا کرتا ہے، اور پھر طول لہر مساوات (15.12) کی اس شکل سے متعین ہوتی ہے:

مقابلتاً سادہ طریقہ اپناتے ہیں۔ ابعادی تجزیہ میں ہم پہلے ہی سیکھ چکے ہیں کہ (باب 2) مختلف مقداروں کے درمیان، جو ایک دوسرے سے رشتہ رکھتی ہوں، رشتہ کیسے معلوم کیا جاتا ہے۔ اس طرح حاصل کیا گیا رشتہ، ایک مستقلہ جوضربی کی حد تک غیر متعین ہوگا۔

ایک ڈوری کی خطی کمیت کثافت، اس کی کمیت m کو اس کی لمبائی l سے تقسیم کرنے پر حاصل ہوگی۔ اس لیے اس کے ابعاد $[ML^{-1}]$ ہیں۔ تناؤ T کے ابعاد $[MLT^{-2}]$ یعنی کہ $[MLT^{-2}]$ ۔ ہمارا مقصد μ اور T کو اس طرح یک جا کرنا ہے کہ v [ابعاد: (LT^{-1})] حاصل ہو سکے۔ اگر ہم ان مقداروں کے ابعاد کو جانچیں، تو یہ دیکھا جاسکتا ہے کہ نسبت T/μ کے ابعاد ہیں۔

$$\frac{[MLT^{-2}]}{[ML^{-1}]} = [L^2 T^{-2}]$$

ایک پلس کی ایک ڈوری پر اشاعت (Propagation of a pulse on a rope)

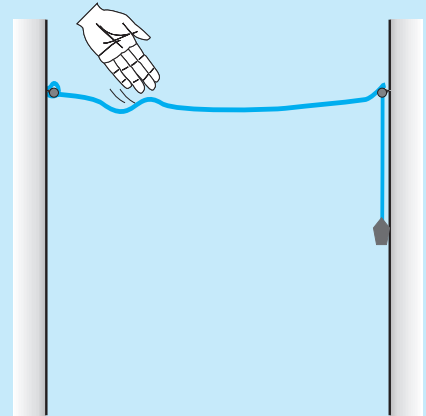
آپ ایک ڈوری پر ایک پلس کی حرکت بہ آسانی دیکھ سکتے ہیں۔ آپ ایک استوار حد سے اس کا انعکاس ہوتا ہوا بھی دیکھ سکتے ہیں اور اس کے ڈوری پر سے گزرنے کی رفتار بھی ناپ سکتے ہیں۔ آپ کو، قطر 1 سے 3 سینٹی میٹر کی، ایک ڈوری دوہک (Hooks) اور کچھ اوزان چاہیے ہوں گے۔ آپ اپنے کلاس روم یا تجربہ گاہ میں تجربہ کر سکتے ہیں۔

ایک لمبی رستی یا موٹی ڈوری لیجیے (قطر 1 سے 3 سینٹی میٹر) اور ایک بڑے کمرے یا تجربہ گاہ کی آٹنے سامنے کی دیواروں پر اسے ایک ہک سے باندھ دیجیے۔ ایک سرے کو ہک سے لٹکنے دیجیے اور اس سے کچھ وزن لٹکا دیجیے۔ (1 سے 5 کلوگرام تک)۔ دیواروں کے درمیان تقریباً 1 سے 5 میٹر کی دوری ہو۔

ایک چھڑیا ڈنڈی لیجیے اور اسے رسی کے سرے کے قریب ایک نقطے پر زور سے ماریے۔ اس سے رسی میں ایک پلس پیدا ہوگی جو اس پر سے گزرے گی۔ آپ اسے دوسرے سرے تک پہنچتے اور وہاں سے واپس منعکس ہوتے دیکھ سکتے ہیں۔ آپ واقع پلس (Incident pluse) اور منعکس پلس (Reflected)

pulse کے درمیان فی رشتے کی جانچ بھی کر سکتے ہیں۔ پلس ختم ہونے سے پہلے آپ بہ آسانی دو یا تین انعکاس دیکھ سکتے ہیں۔ آپ ایک اسٹاپ واچ کی مدد سے پلس کو دو دیواروں کا درمیانی فاصلہ طے کرنے میں لگنے والا وقت بھی معلوم کر سکتے ہیں۔ اور اس طرح اس کی رفتار ناپ سکتے ہیں۔ اس کا مقابلہ مساوات (15.14) سے حاصل ہوئی قدر سے کیجیے۔

ایک آلہ موسیقی کے باریک دھاتی تار میں بھی یہی ہوتا ہے۔ بظاہر فرق یہ ہے کہ یہاں (دھاتی تار) پر رفتار کافی تیز ہوتی ہے کیونکہ ایک موٹی رسی کے مقابلے میں اس کی کمیت فی اکائی لمبائی کم ہوتی ہے۔ موٹی رسی پر پلس کی رفتار کم ہونے کی وجہ سے ہم اس کی حرکت کو بہ آسانی دیکھ سکتے ہیں اور پیمائش کر سکتے ہیں۔



ایک واسطے میں، دابوں اور تلتطیفات یا کثافت میں تبدیلی کی شکل میں حرکت کرتی ہیں اس لیے واسطے کی اندرونی خاصیت جو اس عمل میں شامل ہو سکتی ہے، وہ ہے کثافت ρ ۔ کثافت کے ابعاد $[ML^{-3}]$ ہیں۔ اس لیے نسبت B/ρ کے ابعاد ہیں

$$\frac{[ML^{-1}T^{-2}]}{[ML^{-3}]} = [L^2 T^{-2}] \quad (15.17)$$

اس لیے، ابعادی تجزیے کی بنیاد پر، ایک واسطے میں طولی لہر کی رفتار کے لیے، مناسب ترین ریاضیاتی عبارت ہے:

$$v = C \sqrt{\frac{B}{\rho}} \quad (15.18)$$

جہاں C ایک غیر ابعادی مستقلہ ہے اور یہ ثابت کیا جاسکتا ہے کہ اس کی قدر 1 ہے۔ اس لیے، ایک واسطے میں طولی لہروں کی رفتار دی جاتی ہے:

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}} \quad (15.19)$$

اس لیے، ایک سیال میں، ایک طولی لہر کی اشاعت کی رفتار صرف واسطے کے حجم مقیاس اور اس کی کثافت کے تابع ہے۔

جب ایک ٹھوس چھڑ کے سرے پر ایک چوٹ لگائی جاتی ہے تو صورت حال، مستقلہ تراشی رقبے کے استوانے (یا ٹیوب) میں رکھے ہوئے سیال سے مختلف ہوتی ہے۔ اس صورت میں، لچک کا متعلقہ مقیاس، ینگ کا مقیاس ہے، کیونکہ اطراف میں ہونے والی، چھڑ کی توسیع نظر انداز کی جاسکتی ہے اور صرف طولی بگاڑ ہی قابل لحاظ ہے۔ یہ ثابت کیا جاسکتا ہے کہ ایک چھڑ میں طولی موج کی رفتار ہے:

$$v = \sqrt{\frac{Y}{\rho}} \quad (15.20)$$

جہاں Y چھڑ کے میڈیئل کا ینگ کا مقیاس ہے۔
جدول 15.1 میں مختلف واسطوں میں آواز کی رفتار دی گئی ہے۔

$$\lambda = \frac{v}{\nu} \quad (15.15)$$

مثال 15.3: فولاد کے بنے 0.72m تار کی کیت $5.0 \times 10^{-3} \text{ kg}$ ہے۔ اگر تار 60N کے ایک تناؤ کے زیر اثر ہے، تو اس تار پر گزر رہی عرضی لہر کی رفتار کیا ہوگی؟

جواب: تار کی کیت فی اکائی لمبائی μ :

$$\mu = \frac{5.0 \times 10^{-3} \text{ kg}}{0.72 \text{ m}} = 6.9 \times 10^{-3} \text{ kg m}^{-1}$$

$$T = 60 \text{ N}$$

تار سے گزر رہی لہر کی رفتار v دی جاتی ہے:

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \sqrt{\frac{60 \text{ N}}{6.9 \times 10^{-3} \text{ kg m}^{-1}}} = 93 \text{ m s}^{-1}$$

15.4.2 ایک طولی لہر کی رفتار۔ آواز کی لہر کی رفتار

Speed of a longitudinal wave speed of sound

ایک طولی لہر میں واسطے کے اجزائے ترکیبی، آگے پیچھے، لہر کی اشاعت کی سمت میں اهتزاز کرتے ہیں۔ ہم پہلے ہی دیکھ چکے ہیں کہ آواز کی لہریں، ہوا کے چھوٹے جھبوں کے دابوں اور تلتطیفات (Compressions and rarefactions) کی شکل میں سفر کرتی ہیں۔ وہ خاصیت، جو یہ متعین کرتی ہے کہ واسطے کے ایک جز پر دباؤ کی تبدیلی سے اس جز کے حجم میں کتنی تبدیلی ہوگی، حجم مقیاس (Bulk modulus) کہلاتی ہے۔ جس کی تعریف ہے (دیکھئے باب 9)

$$B = - \frac{\Delta P}{\Delta V/V} \quad \dots (15.16)$$

جہاں $\Delta V/V$ ، دباؤ تبدیلی ΔP کے ذریعے ہونے والی، حجم میں کسری تبدیلی ہے۔ دباؤ کی SI اکائی Nm^{-2} یا پاسکل ہے۔ اب کیونکہ طولی لہریں،

جدول 15.1 کچھ واسطوں میں آواز کی رفتار

واسطہ	رفتار (ms^{-1})
گیسیں	
ہوا (0°C)	331
ہوا (20°C)	343
ہیلیم	965
ہائیڈروجن	1484
رقتی اشیا	
پانی (0°C)	1402
پانی (20°C)	1482
سمندر کا پانی	1522
ٹھوس اشیا	
المونیم	6420
تانبا	3560
فولاد	5941
گرینائٹ	6000
ولکائی ہوئی (Vulcanised)	
ربر (Rubber)	54

T گیس کا درجہ حرارت (کیلون میں) ہے۔

اس لیے مساوات (15.21) سے اخذ کیا جاسکتا ہے کہ ایک ہم تابی تبدیلی کے لیے

$$V\Delta P + P\Delta V = 0$$

$$-\frac{\Delta P}{\Delta V/V} = P \quad \text{یا}$$

اس لیے، مساوات (15.16) میں رکھنے پر،

$$B = P$$

اس لیے، مساوات (15.19) سے، ایک کامل گیس میں، طولی لہر کی رفتار

دی جاتی ہے:

$$v = \sqrt{\frac{P}{\rho}} \quad (15.22)$$

یہ رشتہ سب سے پہلے نیوٹن نے دیا تھا، اس لیے نیوٹن کا ضابطہ کہلاتا ہے۔

مثال 15.4: معیاری دباؤ اور درجہ حرارت پر، ہوا میں آواز کی رفتار کا

تخمینہ لگائیے۔ ہوا کے ایک مول کی کمیت $29.0 \times 10^{-3} \text{ kg}$ ہے۔

جواب: ہم جانتے ہیں کہ کسی بھی گیس کے ایک مول کا S.T.P. پر حجم 22.4 لیٹر ہوتا ہے۔ اس لیے STP پر ہوا کی کثافت δ_0 ہے۔

STP پر ہوا کے ایک مول کا حجم $\delta_0 =$

$$\delta_0 = \frac{29.0 \times 10^{-3} \text{ kg}}{22.4 \times 10^{-3} \text{ m}^3} = 1.29 \text{ kg m}^{-3}$$

ایک وسیلے میں آواز کی رفتار کے نیوٹن کے فارمولے کے مطابق، ہم ہوا

میں STP پر آواز کی رفتار حاصل کرتے ہیں:

$$v = \left[\frac{1.01 \times 10^5 \text{ N m}^{-2}}{1.29 \text{ kg m}^{-3}} \right]^{1/2} = 280 \text{ ms}^{-1} \quad (15.23)$$

مساوات (15.23) میں دکھایا گیا نتیجہ، تجرباتی قدر 331 ms^{-1} ، جو

جدول 15.1 میں دی گئی ہے، کے مقابلے میں تقریباً 15% کم ہے۔ ہم نے

کہاں غلطی کی؟ اگر ہم نیوٹن کے بنیادی مفروضے، ایک واسطے میں آواز کی

اشاعت کے دوران ہونے والی دباؤ کی تبدیلیاں، ہم تاپ ہیں، کو جانچیں تو

ہمیں معلوم ہوتا ہے کہ یہ مفروضہ درست نہیں ہے۔ لاپلاس (Laplace) نے یہ

نشاندہی معلوم کی کیوں کہ آواز کی لہروں کی اشاعت کے دوران ہونے والے دباؤ

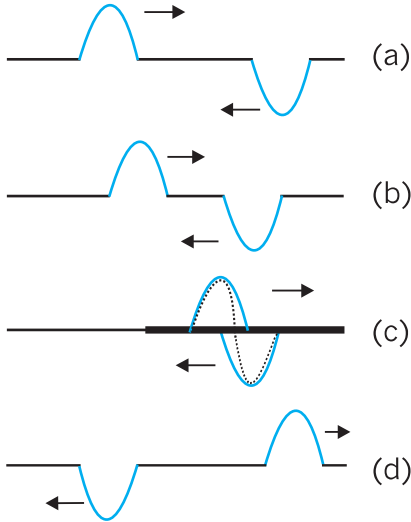
یہ نوٹ کیا جاسکتا ہے کہ حالانکہ ٹھوس اور رقتی اشیا کی کثافتیں، گیسوں کے مقابلے میں بہت زیادہ ہوتی ہیں، پھر بھی ان میں آواز کی رفتار، گیسوں میں آواز کی رفتار سے زیادہ ہوتی ہے۔ ایسا اس لیے ہوتا ہے کیونکہ ٹھوس اور رقتی اشیا گیسوں کے مقابلے میں کم داب پذیر ہیں، یعنی ان کے حجم مقیاس کی قدر، گیسوں کے مقابلے میں بہت زیادہ ہوتی ہے۔ اب دیکھیے مساوات (15.19) ٹھوس اور مائع اشیا کی کمیت کثافتیں، گیسوں کے مقابلے میں زیادہ ہوتی ہیں، لیکن حجم مقیاس میں متطابق اضافہ، ٹھوس اور مائع اشیا میں گیسوں کے مقابلے میں کہیں زیادہ ہوتا ہے۔ یہی وجہ ہے کہ آواز کی لہریں گیسوں کے مقابلے میں ٹھوس اور مائع واسطوں میں زیادہ رفتار سے سفر کرتی ہیں۔

ایک کامل گیس کے لیے دباؤ، P اور حجم V میں رشتہ ہے (دیکھیے باب 11)

$$PV = Nk_B T \quad (15.21)$$

جہاں N، حجم V میں مالکیولوں کی تعداد، k_B بولٹز مین مستقلہ، اور

لہری وجہ سے ہونے والے انفرادی نقل کا الجبرائی حاصل جمع (Algebraic sum) ہے۔ انفرادی لہری شکلوں کو اس طرح جوڑ کر کل لہر شکل معلوم کرنے کا یہ طریقہ



شکل 15.9: تصویروں کا ایک ترتیب وار سلسلہ، جو ایک تنی ہوئی ڈوری پر دو پلسوں کو مخالف سمت میں گذرتے ہوئے دکھاتا ہے۔ وہ ایک دوسرے سے ملتی ہیں، ایک دوسرے میں سے گذرتی ہیں اور پھر انفرادی طور پر آزادانہ حرکت کرتی ہیں، جیسا کہ مختلف وقتوں پر لیے گئے فوری فوٹو (a) سے (d) تک کے ذریعے دکھایا گیا ہے۔ کل خلل، پہلے کی وجہ سے ہونے والے انفرادی نقل کا الجبرائی حاصل جمع ہے۔ جب دونوں خلل ایک دوسرے پر منطبق ہوتے ہیں تو وہ ایک پیچیدہ نمونہ دیتے ہیں، جیسا کہ شکل (c) میں دکھایا گیا ہے۔ علاقہ (d) میں ایک دوسرے سے گذر چکے ہیں اور اب بنا تبدیل ہوئے حرکت کرتے ہیں۔

انطباق کا اصول (Principle of superposition) کہلاتا ہے۔ اس قاعدے کو ریاضیاتی شکل میں لکھنے کے لیے، فرض کیجیے کہ $y_1(x, t)$ اور $y_2(x, t)$ وہ نقل ہیں جو ڈوری کے کسی بھی جزی میں ہوتے ہیں اگر ہر لہر اس جزی میں سے انفرادی طور پر گذر رہی ہوتی۔ اس جزی کا نقل $y(x, t)$ ، جو دونوں لہروں کے ایک دوسرے پر منطبق (Overlap) ہونے کی وجہ سے ہوتا ہے، دیا جاتا ہے:

کے تغیرات اتنے تیز رفتار ہوتے ہیں کہ حرارت کے بہاؤ کو مستقلہ درجہ حرارت برقرار رکھنے کے لیے ملنے والا وقت نا کافی ہوتا ہے۔ اس لیے، یہ تغیرات حرنا گزار ہیں۔ حرنا گزار طریق کے لیے کامل گیس مساوات ہے

$$PV^\gamma = \text{مستقلہ}$$

یعنی کہ

$$\Delta PV^\gamma = 0$$

جہاں γ ، نوعی حرارتوں کی نسبت C_p/C_v ہے۔ اس لیے ہوا کی رفتار مساوات (15.19) سے دی جاتی ہے:

$$P^\gamma V^{\gamma-1} \Delta V + V^\gamma \Delta P = 0$$

اس لیے ایک کامل گیس کے لیے حرنا گزار حجم مقیاس دیا جاتا ہے

$$B_{ad} = -\frac{\Delta P}{\Delta V/V} = \gamma P$$

$$v = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}}$$

(15-24)

نیوٹن کے فارمولے کی یہ ترمیم لپلیس تصحیح (Laplace correction)

کہلاتی ہے۔ ہوا کے لیے، $\gamma = 7/5$ ۔ اب مساوات (15.24) کے ذریعے ہوائیں، STP پر آوازی رفتار کا تخمینہ لگانے پر، ہمیں قدر 331.3 ms^{-1} حاصل ہوتی ہے، جو تجربہ کے ذریعے معلوم کی گئی قدر سے مطابقت رکھتی ہے۔

15.5 لہروں کے انطباق کا اصول

(THE PRINCIPLE OF SUPERPOSITION OF WAVES)

ہم دوا لہریں تصور کرتے ہیں جو ایک ہی تنی ہوئی ڈوری پر مختلف سمتوں میں، ہمہ وقت (Simultaneously) حرکت کر رہی ہیں۔ شکل 15.9 میں دکھایا گیا تصویروں کا ترتیب وار سلسلہ، ڈوری کے مختلف اجزا کی، وقت کی مختلف ساعتوں پر نقل کی حالتوں کو ظاہر کرتا ہے۔ ہر تصویر ایک دی ہوئی ساعت وقت پر، ڈوری میں، ماحصل لہر شکل کو ظاہر کرتی ہے۔ مشاہدہ یہ بتاتا ہے کہ دیے ہوئے لمحہ وقت پر ڈوری کے کسی بھی جزی کا کل نقل (Net displacement)، ہر

اب لہروں کے انطباق کا اصول استعمال کرنے پر، ماحصل لہروں جو ترکیبی لہروں کا الجبرائی حاصل جمع ہے اور اس کا نقل ہے:

$$y(x, t) = a \sin(kx - \omega t) + a \sin(kx - \omega t + \phi) \quad (15.29)$$

اب ہم مندرجہ ذیل ٹرگنومیٹریائی رشتہ استعمال کرتے ہیں۔

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta) \quad (15.30)$$

اس رشتہ کو مساوات (15.29)، میں استعمال کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے:

$$y(x, t) = [2a \cos \frac{1}{2}\phi] \sin(kx - \omega t + \frac{1}{2}\phi) \quad (15.31)$$

مساوات (15.31) ظاہر کرتی ہے کہ ماحصل لہر بھی ایک سائن خم نما لہر ہے جو $-x$ کی مثبت سمت میں حرکت کر رہی ہے۔

ماحصل لہر، جز ترکیبی لہروں سے دو طرح سے مختلف ہے۔ (i) اس کا فیئر زاویہ ϕ ($\frac{1}{2}$) ہے (ii) اس کی سعت، مساوات (15.31) میں قوسین [] میں دی ہوئی مقدار ہے، یعنی کہ

$$A(\phi) = 2a \cos \frac{1}{2}\phi \dots (15.32)$$

اگر $\phi = 0$ یعنی کہ دونوں لہریں فیئر میں ہوں تو مساوات (15.31) سے حاصل ہوتا ہے۔

$$A(u) = 2a; y(x, t)\phi = 0 = 2a \sin(kx - \omega t) \quad (15.33)$$

ماحصل لہر کی سعت $2a$ ہے، جو $A(\phi)$ کی سب سے بڑی ممکنہ قدر ہے۔ اگر $\phi = \pi$ ، تو دونوں لہریں مکمل طور پر فیئر کے باہر ہیں تو مساوات (15.32) کے ذریعے دی گئی ماحصل لہر کی سعت کی قدر صفر ہو جاتی ہے۔ تب ہر x اور t کے لیے، ہمیں حاصل ہوتا ہے:

$$y(x, t) = 0 \quad (15.34)$$

یہ صورتیں، شکل 15.10 میں دکھائی گئی ہیں۔

15.6 لہروں کا انعکاس

(REFLECTION OF WAVES)

پچھلے حصوں میں ہم نے غیر سرحدی (Unbounded) واسطوں میں لہر کی اشاعت سے بحث کی ہے۔ کیا ہوگا، اگر ایک پلس یا رواں لہر ایک استوار حد

$$y(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t) \quad (15.25)$$

انطباق کا اصول ایسے بھی بیان کیا جاسکتا ہے: منطبق لہریں، الجبرائی طور پر جمع ہوتی ہیں اور ایک ماحصل لہر (Resultant wave) پیدا کرتی ہیں (یا کل لہر)۔ اس اصول کے معنی ہیں، کہ منطبق لہریں کسی بھی طرح سے ایک دوسرے کی حرکت کو تبدیل نہیں کرتیں۔

اگر ہمارے پاس ایک واسطے میں دو یا دو سے زیادہ حرکت کرتی ہوئی لہریں ہیں تو ماحصل لہر، انفرادی لہروں کے لہر تفاعلات کا حاصل جمع ہے۔ یعنی کہ اگر حرکت کرتی ہوئی لہروں کے لہر تفاعلات ہیں۔

$$y_1 = f_1(x - vt),$$

$$y_2 = f_2(x - vt),$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\dots\dots\dots$$

$$y_n = f_n(x - vt)$$

تب واسطے میں، غلغل کو بیان کرنے والا لہر تفاعل ہے:

$$y = f_1(x - vt) + f_2(x - vt) + \dots + f_n(x - vt)$$

$$= \sum_{i=1}^n f_i(x - vt) \quad (15.26)$$

اس اصول کی وضاحتی مثال کے طور پر، ہم لہروں کے تداخل (Interference)

اور انعکاس (Reflection) کے مظاہر کا مطالعہ کرتے ہیں۔

فرض کیجیے کہ ایک تنی ہوئی ڈوری پر حرکت کرتی ہوئی ایک لہر دی جاتی ہے:

$$y_1(x, t) = a \sin(kx - \omega t) \quad (15.27)$$

اور دوسری لہر، جو پہلی لہر سے فیئر سے ہٹی ہوئی ہے، دی جاتی ہے

$$y_2(x, t) = a \sin(kx - \omega t + \phi) \quad (15.28)$$

دونوں لہروں کے زاویائی تو اتر یکساں ہیں، زاویائی لہر عدد k یکساں ہیں

(یکساں طول لہر) اور سعت a یکساں ہے۔ وہ یکساں چال سے $-x$ محور کی

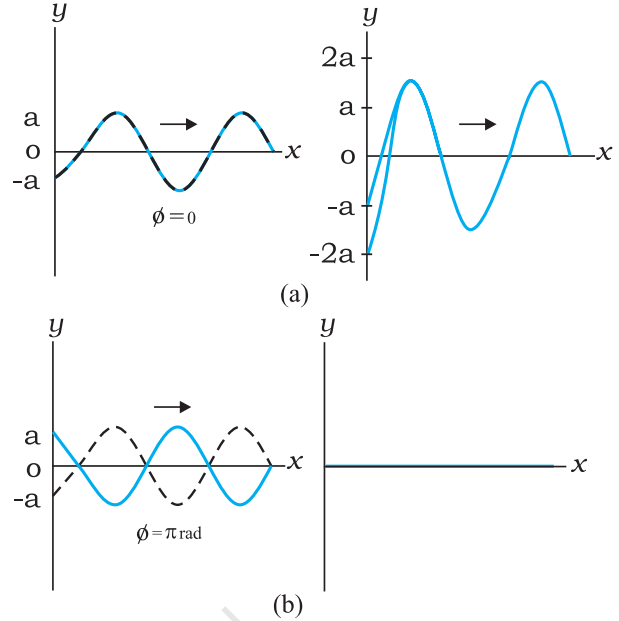
مثبت سمت میں حرکت کرتی ہیں۔ ان کے فیئر کا فرق ایک دیے ہوئے فاصلے

اور سعت وقت پر، ایک مستقلہ زاویہ ϕ ہے۔ یہ کہا جاسکتا ہے کہ وہ ϕ سے فیئر

کے باہر (out of phase) ہیں یا ان میں فیئر ϕ کا فرق ہے۔

ایک سرحد پر، ایک لہر کے انعکاس کی وضاحت کرنے کے لیے ہم دو صورتیں لیتے ہیں۔ پہلی صورت: ایک ڈوری، جس کا بائیں سر ایک استوار دیوار میں نصب ہے، جیسا کہ شکل (a) 15.11 میں دکھایا گیا ہے۔ اور دوسری صورت: ڈوری کا بائیں سر ایک چھلے (ring) سے بندھا ہوا ہے جو ایک چھڑ پر، بنا کسی رگڑ کے، اوپر نیچے پھسلتا ہے، جیسا کہ شکل (b) 15.11 میں دکھایا گیا ہے۔ ایک پلس کو ان دونوں ڈوریوں پر سے گزرنے دیا جاتا ہے۔ یہ پلس بائیں سرے پر پہنچنے پر منعکس ہو جاتی ہے۔ مختلف ساعتوں پر، ڈور میں خلل کی حالت، شکل 15.11 میں دکھائی گئی ہے۔

شکل (a) 15.11 میں، ڈوری کا دایاں سر دیوار میں نصب ہے، جب پلس اس سرے پر پہنچتی ہے تو وہ دیوار پر، اوپر کی جانب، ایک قوت لگاتی ہے۔ نیوٹن کے تیسرے قانون کے مطابق دیوار، ڈوری پر یکساں عددی قدر کی مخالفت قوت لگاتی ہے۔ یہ دوسری قوت سہارے (دیوار) پر ایک پلس پیدا کرتی ہے جو ڈوری پر سے واپس گزرتی ہے، یعنی کہ اس کی سمت واقع پلس کے سمت کی مخالف ہوتی ہے۔ اس قسم کے انعکاس میں، سہارے پر کوئی نقل نہیں ہونا چاہیے کیونکہ ڈوری وہاں نصب ہے۔ منعکس اور واقع پلسوں کی علامتیں مخالف ہونا ضروری ہیں، تاکہ اس نقطے پر ایک دوسرے کو منسوخ (Cancel) کر سکیں۔ اس لیے ایک رواں لہر کی صورت میں، ایک استوار سرحد پر ہونے والے انعکاس میں فیز لٹ جائے گا یا فیز فرق π یا 180° ہوگا۔ شکل (b) 15.11 میں ڈوری ایک چھلے میں بندھی ہے، جو ایک چھڑ پر، بنا رگڑ کے، پھسلتا ہے۔ اس صورت میں، جب پلس بائیں سرے پر پہنچتی ہے، تو چھلا چھڑ میں اوپر حرکت کرتا ہے۔ جب چھلا حرکت کرتا ہے تو یہ رسی کو کھینچتا ہے، جس سے رسی میں تناؤ پیدا ہوتا ہے اور ایک منعکس پلس بنتی ہے، جس کی علامت اور سرعت، واقع پلس کے یکساں ہوتے ہیں۔ اس لیے ایسے انعکاس میں، واقع اور منعکس پلسیں ایک دوسرے کو تقویت بخشتی ہیں، جس سے ڈوری کے سرے پر از حد نقل پیدا ہوتا ہے، چھلے کا از حد نقل، جو کسی ایک پلس کی سرعت کا دگنا ہوتا ہے۔ اس لیے انعکاس بغیر کسی اضافی فیز تبدیلی کے ہوتا ہے۔ ایک رواں لہر کی صورت میں، ایک کھلی سرحد پر جیسے ایک آرگن پائپ کے کھلے



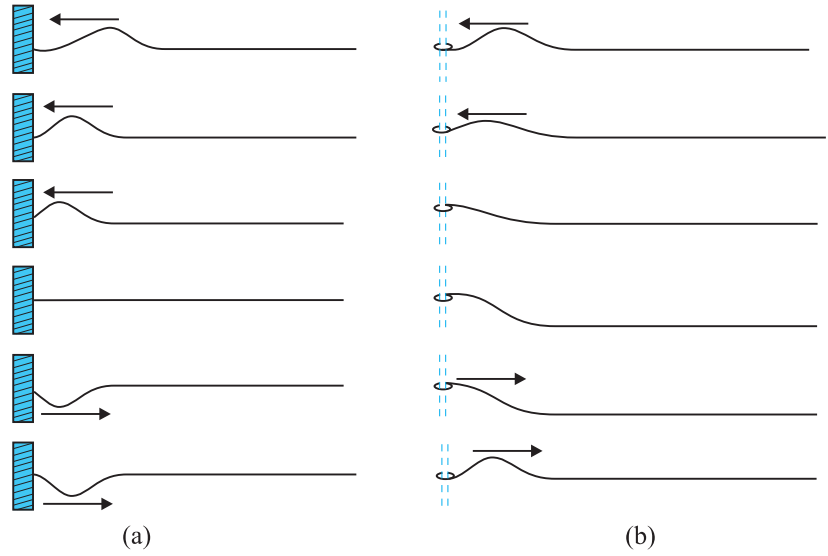
شکل 15.10: دو متماثل سائن خم نما لہریں، $y_1(x, t)$ اور $y_2(x, t)$ ، ایک تنی ہوئی رسی پر، x -محور کی مثبت سمت میں، حرکت کرتی ہیں۔ وہ ایک ماحصل لہر $y(x, t)$ دیتی ہیں۔ دونوں لہروں کے درمیان فیز فرق ہے: 0 یا π (a) یا 180° ۔ متطابق ماحصل لہریں (c) اور (d) میں دکھائی گئی ہیں۔

سے ٹکرائے؟ یہ عام تجربہ ہے کہ اس صورت میں پلس یا لہر منعکس ہو جاتی ہے۔ آواز کی لہروں کے ایک استوار سرحد سے منعکس ہونے کی، روزمرہ کی ایک مثال، گونج (Echo) کا مظہر ہے۔ اگر سرحد مکمل طور پر استوار نہ ہو یا دو پچیلے واسطوں کے درمیان بین رخ ہو، تو ان سرحدی شرائط (Boundary conditions) کا وقوعی پلس یا لہر (Incident pulse or wave) پر اثر کچھ پیچیدہ ہوتا ہے۔ لہر کا ایک حصہ منعکس ہو جاتا ہے اور ایک حصہ کی دوسرے واسطے میں ترسیل ہو جاتی ہے۔ اگر ایک لہر، دو مختلف واسطوں کی درمیانی سرحد پر ترچھی واقع (Obliquely incident) ہو تو ترسیل ہوئی لہر (transmitted wave) انعطافی لہر (Refracted wave) کہلاتی ہے۔ واقع اور انعطاف لہریں، انعکاس کے اسنیل کے قانون (Snell's Law refraction) کی پابندی کرتی ہیں اور واقع اور انعکاسی لہریں، انعکاس کے عام قوانین کی پابندی کرتی ہیں۔

15.6.1 مقیم لہریں اور نارمل موڈ

(Standing waves and normal modes)

پچھلے حصے میں ہم نے ایسا نظام لیا تھا جو ایک سرے پر مقید تھا۔ آئیے اب ایک ایسا نظام لیتے ہیں جو دونوں سروں پر مقید ہے، جیسے کہ دونوں سروں پر بندھی ہوئی رسی یا ایک متناہی لمبائی کا ہوا کا کالم ایک ایسے نظام میں ہم کسی خاص تعدد کی ایک لگاتار، سائن خم نما لہر بھیجتے ہیں، فرض کیجیے دائیں طرف۔ جب لہر دائیں سرے پر پہنچتی ہے تو یہ منعکس ہو جاتی ہے اور واپس



لوٹنا شروع کر دیتی ہے۔ جب بائیں جانب جارہی لہر، بائیں سرے پر پہنچتی ہے تو یہ دوبارہ منعکس ہوتی ہے اور یہ نئی منعکس ہوئی لہر دائیں سمت حرکت کرنا شروع کرتی ہے، اور بائیں سمت جارہی لہر پر منطبق ہوتی ہے۔ یہ عمل جاری رہتا ہے اور اس لیے جلد ہی

ہمیں بہت سی منطبق لہریں ملتی ہیں، جو ایک دوسرے سے تداخل کرتی ہیں۔ ایسے نظام میں کسی نقطہ پر، کسی وقت پر، ہمیشہ دو لہریں ہوتی ہیں۔ ایک بائیں طرف حرکت کرتی ہوئی اور دوسری دائیں طرف۔ اس لیے ہمیں حاصل ہوتا ہے:

$$y_1(x, t) = a \sin(kx - \omega t) \quad (-x \text{ محور کی مثبت سمت میں حرکت کرتی ہوئی لہر})$$

$$y_2(x, t) = a \sin(kx + \omega t) \quad (-x \text{ محور کی منفی سمت میں حرکت کرتی ہوئی لہر})$$

متحدہ (Combined) لہر کے لیے، انطباق کا اصول دیتا ہے:

$$\begin{aligned} y(x, t) &= y_1(x, t) + y_2(x, t) \\ &= a \sin(kx - \omega t) + a \sin(kx + \omega t) \\ &= (2a \sin kx) \cos \omega t \end{aligned} \quad (15.37)$$

مساوات (15.37) کے ذریعے بیان کی گئی لہر، ایک رواں لہر کو نہیں ظاہر کرتی۔ کیونکہ لہر کی شکل یا خلل کسی طرف حرکت نہیں کرتا۔ یہاں مقدار: $2a \sin kx$ (توسمین کے اندر)، مقام x پر پائے جانے والے ڈوری کے

شکل 15.11: (a) ایک پلس جو دائیں سمت سے واقع ہے، ایک ڈوری کرے بائیں سرے پر، جو دیوار میں بندھا ہے، منعکس ہوتی ہے۔ نوٹ کریں کہ منعکس پلس، واقع پلس کی مناسبت سے الٹی ہے۔ (b) یہاں بایاں سرا ایک ایسے جھلے سے بندھا ہے جو ایک چھڑ پر، بنا کسی رگڑ کے، اوپر نیچے پھسل سکتا ہے۔ اب انعکاس کے ذریعے منعکس لہر الٹی نہیں ہوتی۔

ہوئے سرے پر، انعکاس بغیر کسی فیز تبدیلی کے ہوتا ہے۔

اب ہم، ایک سرحد یا دو واسطوں کے مابین رخ پر، لہروں کے انعکاس کا خلاصہ مندرجہ ذیل شکل میں پیش کر سکتے ہیں: ایک رواں لہر، ایک استوار سرحد یا ایک بند سرے پر، فیز کے الٹنے کے ساتھ منعکس ہوتی ہے۔ لیکن ایک کھلی سرحد پر انعکاس بغیر کسی فیز تبدیلی کے ساتھ ہوتا ہے۔

مندرجہ بالا بیان کو ریاضیاتی شکل میں ظاہر کرنے کے لیے، فرض کیجیے کہ واقع لہر کو ظاہر کیا جاتا ہے

$$y^i(x, t) = a \sin(kx - \omega t)$$

تب، ایک استوار سرحد پر انعکاس کے لیے، منعکس لہر ظاہر کی جاتی ہے

$$y_r(x, t) = a \sin(kx + \omega t + \pi).$$

$$= -a \sin(kx + \omega t) \quad (15.35)$$

ایک کھلی سرحد پر، منعکس لہر ظاہر کی جاتی ہے:

$$y_r(x, t) = a \sin(kx + \omega t). \quad (15.26)$$

لگاتار نوڈوں کے درمیان $\lambda/2$ یا نصف طول لہر کا فاصلہ ہوتا ہے۔
 سعت کی بیش ترین قدر $2a$ ہے۔ یہ kx کی ان قدروں پر ہوتی ہے، جو
 $|\sin kx| = 1$ دیتی ہیں۔
 ایسی قدریں ہیں:

$$kx = (n + 1/2) \pi \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

اس مساوات میں $k = 2\pi/\lambda$ رکھنے پر، ہمیں از حد سعت کے مقام حاصل
 ہوتے ہیں:

$$x = (n + 1/2) \frac{\lambda}{2} \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots) \quad (15.39)$$

یہ اینٹی نوڈ (خند نوڈ Antinode) کہلاتے ہیں۔ اینٹی نوڈوں کے
 درمیان $\frac{\lambda}{2}$ فاصلہ ہوتا ہے اور یہ نوڈوں کے جوڑے کے درمیان، ان کے
 وسطی نقطے پر ہوتے ہیں۔

ایک لمبائی L کی تنی ہوئی ڈوری کے لیے، جس کے دونوں سرے بندھے ہوئے

جز کے ارتزاز کی سعت ہے۔ اس کے برخلاف، ایک رواں لہر میں تمام اجزا
 کے لیے لہر یکساں ہوتی ہے۔ اس لیے مساوات (15.37) ایک مقیم لہر
 (Standing wave) کو ظاہر کرتی ہے۔ ایک ایسی لہر جس میں لہر کی شکل
 حرکت نہیں کرتی۔ ایسی لہروں کی تشکیل شکل 15.12 میں دکھائی گئی ہے۔

یہ دیکھنے میں آتا ہے کہ بیش ترین اور کم ترین سعت کے نقاط ایک ہی مقام
 پر ٹھہرے رہتے ہیں۔

kx کی ان قدروں کے لیے سعت صفر ہے جو $\sin kx = 0$ دیتی ہیں۔

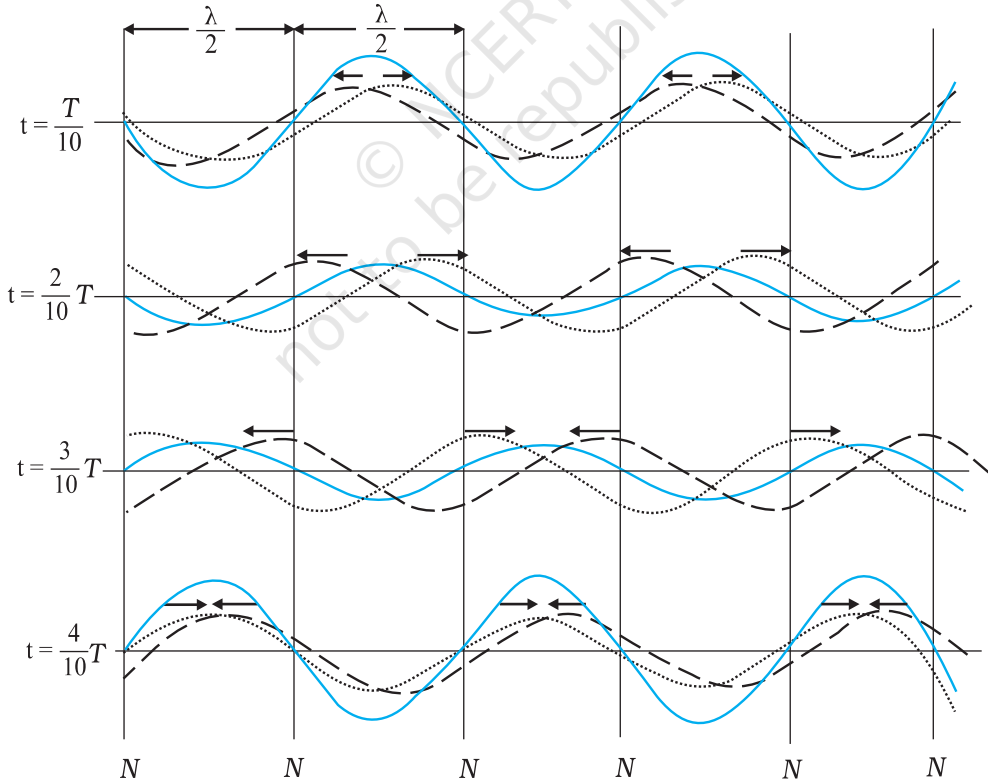
یہ قدریں ہیں:

$$kx = n\pi, \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

اس مساوات میں $k = 2\pi/\lambda$ رکھنے پر،

$$x = n\lambda/2 \dots \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots) \quad (15.38)$$

صفر سعت کے مقامات نوڈ (Nodes) کہلاتے ہیں۔ نوٹ کریں کہ دو



شکل 15.12: ایک تنی ہوئی ڈوری میں ایک مقیم لہر کا بننا۔ دو یکساں سعت کی سائن ضم نما لہریں، ڈوری پر مخالف سمتوں
 میں حرکت کرتی ہیں۔ تصویروں کا سیٹ، چار مختلف مقامات پر نقل کی حالت دکھاتا ہے۔ جن مقامات کی
 نشاندہی N کے ذریعے کی گئی ہے، ان مقامات پر نقل، وقت کی ہر قدر پر، صفر ہوتا ہے۔ یہ مقامات نوڈ کہلاتے ہیں۔

اب ہم ایسے نظام کے ارتعاش کے موڈوں کا مطالعہ کرتے ہیں۔ جو ایک سرے پر بند ہے، اور جس کا دوسرا سر آزاد ہے۔ ہوا کا کالم، جیسے جزوی طور پر پانی سے بھری ہوئی ٹیوب، ایسے نظاموں کی مثال ہے۔ ان میں ہوا کے کالم کی لمبائی کو ٹیوب میں پانی کی سطح کو تبدیل کر کے، ضرورت کے مطابق کم یا زیادہ کیا جاسکتا ہے۔ ایسے نظاموں میں، ہوا کے کالم کا وہ سرا جو پانی سے لمس میں ہوتا ہے، اس کا کوئی نقل نہیں ہوتا، کیونکہ وہاں منعکس اور واقع لہریں، بالکل درست طور پر، فیز کے باہر ہوتی ہیں۔ اسی وجہ سے، یہاں پر دباؤ کی تبدیلیاں سب سے زیادہ ہوتی ہیں۔ کیونکہ جب داب جز (Compressional part) منعکس ہوتا ہے تو دباؤ میں اضافہ دگنا ہو جاتا ہے اور جب تلطیف جز (Rarefaction part) منعکس ہوتا ہے تو دباؤ میں کمی دگنی ہوتی ہے۔ دوسری طرف، کھلے ہوئے سرے پر، از حد نقل اور کم ترین دباؤ تبدیلی ہوتی ہے۔ یہاں پر مخالف سمتوں میں حرکت کرتی ہوئی دونوں لہریں فیز میں ہوتی ہیں۔ اس لیے دباؤ میں کوئی تبدیلی نہیں ہوتی۔ اب، اگر ہوا کے کالم کی لمبائی L ہے، تب کھلا ہوا سرا، $x=L$ ، ایک اینٹی نوڈ ہے، اس لیے مساوات (15.39) سے اخذ کیا جاسکتا ہے کہ:

$$L = (n + \frac{1}{2}) \frac{\lambda}{2} \quad (\text{لیے } n=0, 1, 2, 3, \dots)$$

وہ موڈ جو مندرجہ ذیل شرط کو مطمئن کرتے ہیں

$$\lambda = \frac{2L}{(n + 1/2)} \quad (\text{لیے } n=0, 1, 2, 3, \dots) \quad (15.43)$$

ایسے ہوا کے کالم میں برقرار رہتے ہیں۔ ایسے ہوا کے کالم کے مختلف موڈوں کے مطابق تعدد دیے جاتے ہیں:

$$v = (n + \frac{1}{2}) \frac{v}{2L} \quad (\text{لیے } n=0, 1, 2, 3, \dots) \quad (15.44)$$

ایک ہوا کالم کے جس کا ایک سرا کھلا ہوا ہے،، کچھ نارل موڈ شکل 15.14 میں دکھائے گئے ہیں۔

ہیں، ڈوری کے دونوں سرے نوڈ (Node) ہی ہونا چاہئیں۔ اگر ہم ایک سرے کو مقام $x=0$ منتخب کر لیں۔ تو دوسرا سرا $x=L$ ہے۔ اس دوسرے سرے کو بھی نوڈ ہونے کے لیے ضروری ہے، کہ L مندرجہ ذیل شرط کو لازمی طور پر مطمئن کرے۔

$$L = n \frac{\lambda}{2} \quad (\text{لیے } n=1, 2, 3, \dots) \quad (15.40)$$

یہ شرط ظاہر کرتی ہے کہ لمبائی L کی ایک ڈوری پر لہر کے طول لہر محدود ہوتے ہیں۔ جو دیے جاتے ہیں۔

$$\lambda = \frac{2L}{n} \quad (\text{لیے } n=1, 2, 3, \dots) \quad (15.41)$$

ان طول لہر کے مطابق تعدد، مساوات (15.12) سے حاصل ہوتے ہیں:

$$v = n \frac{v}{2L} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (15.42)$$

جہاں v رواں لہروں کی ڈوری پر رفتار ہے۔ مساوات (15.42) کے ذریعے دیا گیا تعدد کا سیٹ، نظام کے اهتزاز کے موڈ یا قدرتی تعدد کہلاتے ہیں۔ یہ مساوات ہمیں بتاتی ہے کہ ایک ڈوری کے قدرتی تعدد، کم ترین تعدد، $v = \frac{v}{2L}$ کے صحیح عدد اضعاف (Integral multiples) ہیں، جو کہ $n=1$ سے مطابقت رکھتا ہے۔ اس کم ترین تعدد والا اهتزاز موڈ، بنیادی موڈ (Fundamental Mode) یا پہلا ہارمونک (First Harmonic) کہلاتا ہے۔ دوسرا ہارمونک، $n=2$ کے ساتھ اهتزاز موڈ ہے۔ تیسرا ہارمونک $n=3$ سے مطابقت رکھتا ہے، اور اسی طرح اور آگے بھی۔ ان موڈوں سے منسلک تعدد اکثر v_1, v_2, v_3 (اور اسی طرح اور آگے) لیبیل کیے جاتے ہیں۔ تمام ممکنہ موڈوں کا مجموعہ ہارمونک سلسلہ (Harmonic series) کہلاتا ہے۔

دونوں سروں پر بندھی، ایک تنی ہوئی ڈوری کے کچھ ہارمونک شکل 15.13 میں دکھائے گئے ہیں۔ انطباق کے اصول کے مطابق، دونوں سروں پر بندھی، تنی ہوئی رسی، بہ یک وقت کئی موڈوں میں ارتعاش کر سکتی ہے۔ کون سا موڈ زیادہ ارتعاش کرے گا، یہ اس پر منحصر ہے کہ ڈوری کے کس مقام پر ضرب لگائی گئی ہے۔ ستار اور وائلن جیسے آلات موسیقی اسی اصول پر ڈیزائن کیے جاتے ہیں۔

ساتھ معلوم کیے جاتے ہیں کہ جھٹکی کے محیط کا کوئی نقطہ ارتعاش نہیں کرتا۔ اس نظام کے نارمل موڈوں کے تعدد کا تخمینہ لگانا زیادہ پیچیدہ ہے۔ اس مسئلے میں دو ابعاد میں لہر کی اشاعت شامل ہے۔ حالانکہ، متعلقہ طبیعیات یکساں ہے۔

ہم اوپر دیکھ چکے ہیں کہ ایک دونوں سروں پر بندھی ہوئی ڈوری میں، مقیم لہریں صرف کچھ تعدد پر بنتی ہیں، جو مساوات (15.42) سے دی جاتی ہیں، یا ان تعدد پر نظام گمک کرتا ہے۔ اسی طرح ایک سرے پر کھلا ہوا کالم، مساوات (15.44) سے دیے گئے تعدد پر گمک کرتا ہے۔

مثال 15.5: ایک 30 cm لمبا پائپ دونوں سروں پر کھلا ہوا ہے۔ پائپ کا کون سا ہارمونک موڈ، 1.1k Hz ویلے (Source) کے ساتھ گمک کرے گا؟ کیا اس ویلے سے گمک ہوگی، اگر پائپ کا ایک سر بند کر دیا جائے

جواب: پہلا ہارمونک تعدد دیا جاتا ہے:

$$v_1 = \frac{v}{\lambda_1} = \frac{v}{2L} \text{ (کھلا پائپ)}$$

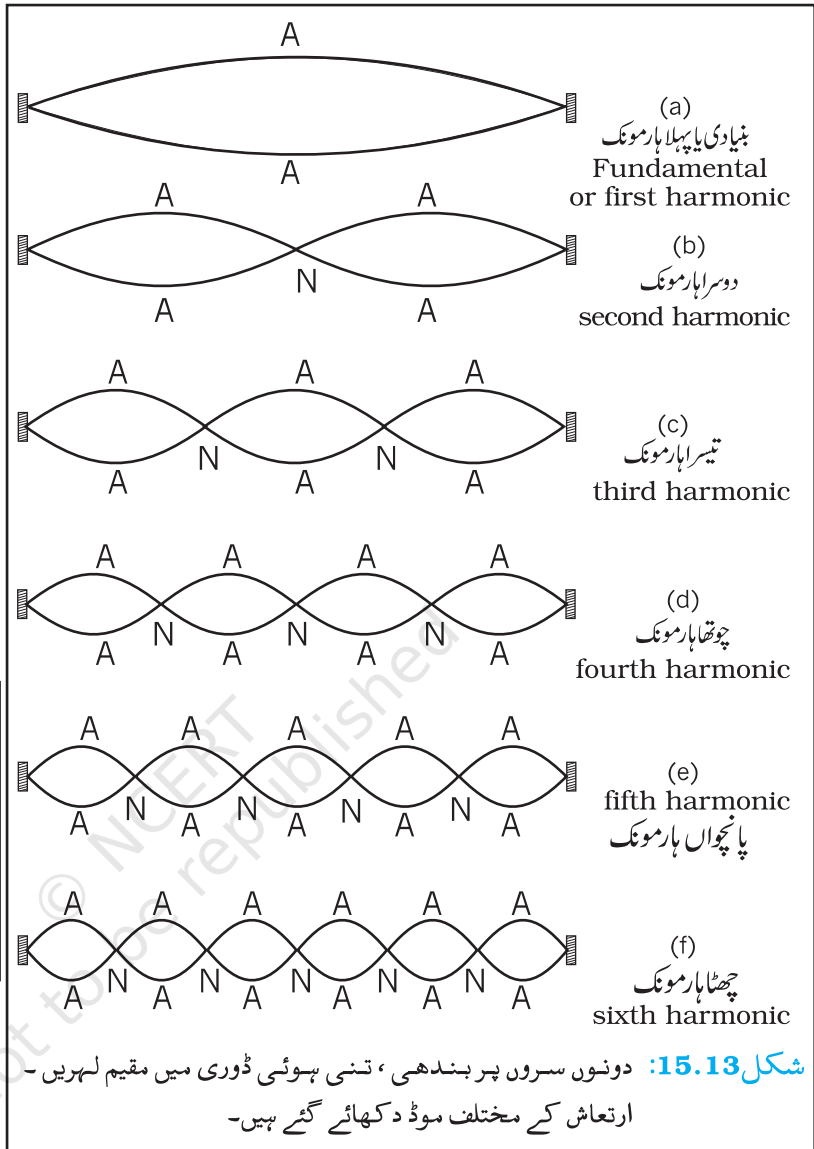
جہاں پائپ کی لمبائی ہے۔ اس کے nth ہارمونک کا تعدد ہے:

$$v_n = \frac{nv}{2L} \text{ (کھلا پائپ) } (n=1,2,3,\dots)$$

ایک سرے پر کھلے پائپ کے کچھ موڈ شکل 15.15 میں دکھائے گئے ہیں۔

$$v = 330 \text{ m s}^{-1} \text{ اور } L = 30.0 \text{ cm}$$

$$v_n = \frac{n \times 330 \text{ (m s}^{-1})}{0.6 \text{ (m)}} = 550 n \text{ s}^{-1}$$



شکل 15.13: دونوں سروں پر بندھی، تنی ہوئی ڈوری میں مقیم لہریں - ارتعاش کے مختلف موڈ دکھائے گئے ہیں۔

بنیادی تعدد $\frac{v}{4L}$ اور اس سے اونچے تعدد، بنیادی تعدد کے طاق

ہارمونک (odd harmonic) ہیں۔

یعنی کہ $3 \frac{v}{4L}$ ، $5 \frac{v}{4L}$ وغیرہ۔

اگر ایک پائپ دونوں سروں پر کھلا ہو، تو دونوں سروں پر اینٹی نوڈ ہوں گے اور تمام ہارمونک پیدا ہوں گے۔

ایک دائری جھٹکی، جو محیط سے استوار طور پر جڑی ہوئی ہو، جیسے طبلہ میں، کے نارمل موڈ اس سرحدی شرط (Boundary Condition) کے

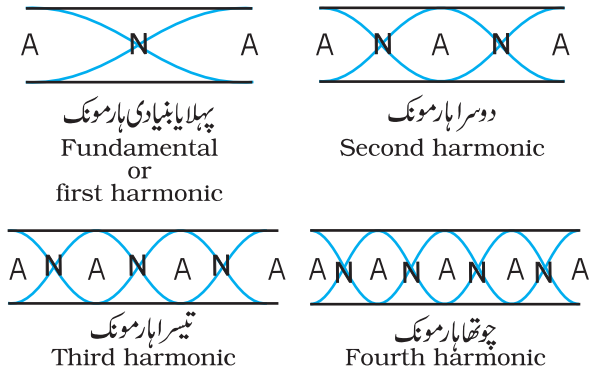
اور صرف طاق اعداد کے ہارمونک ہی بنتے ہیں:

$$v_3 = \frac{3v}{4L}, v_5 = \frac{5v}{4L}$$

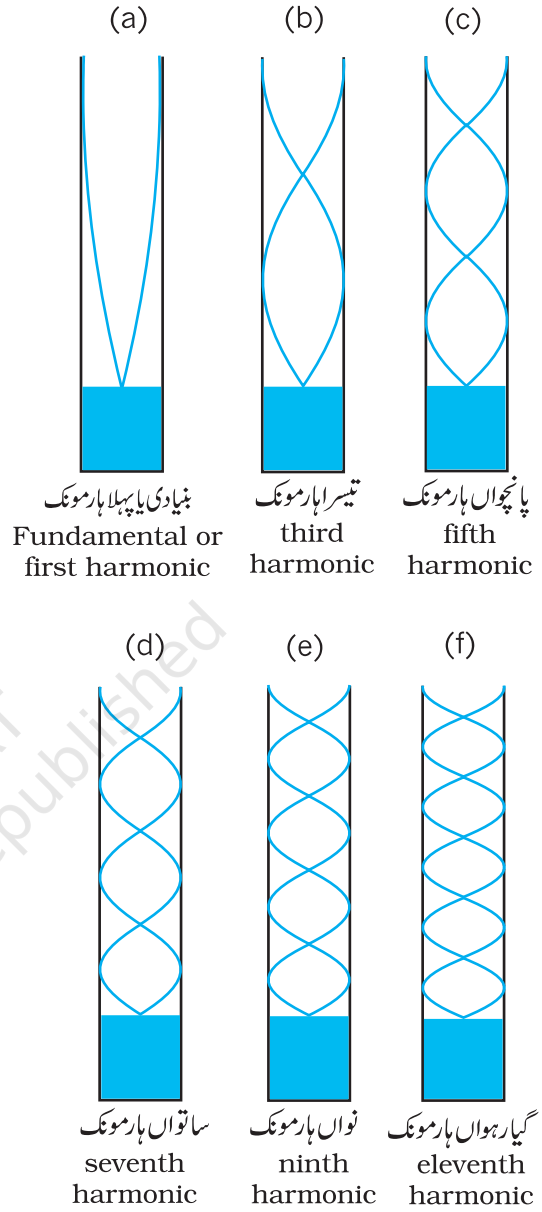
پائپ کا بنیادی تعدد ہے 275Hz اور وسیلے کا تعدد اس کے چوتھے ہارمونک سے مطابقت رکھتا ہے۔ کیونکہ یہ ہارمونک ایک ممکنہ موڈ نہیں ہے، جیسے ہی ایک سرابند کیا جائے گا وسیلے کے ساتھ کوئی گمک نہیں سنائی دے گی۔

15.7 ضربیں (BEATS)

اگر ہم چند منٹ کے وقفے سے، دو ایسی آوازیں سنیں، جن کے تعدد ایک دوسرے سے بہت قریب ہوں، جیسے 256Hz اور 260Hz، تو ہم ان میں فرق نہیں کر پاتے۔ لیکن اگر یہی دونوں آوازیں ہمارے کانوں تک ایک ساتھ پہنچیں تو ہم تعدد 258Hz، دونوں متحد ہونے والے تعدد کا اوسط کی ایک آواز سنتے ہیں۔ اس کے علاوہ ہمیں آواز کی شدت (Intensity) میں ایک نمایاں تبدیلی سنائی دیتی ہے۔ یہ آہستہ تھر تھراتی (جھلملاتی) ضربوں میں زیادہ اور کم ہوتی ہے جو 4Hz کے تعدد، آنے والی آوازوں کے تعدد کے مابین فرق، پر دہرائی جاتی ہے۔ جب تقریباً یکساں تعدد اور سرعت کی دولہریں، یکساں سمت میں حرکت کرتے ہوئے ایک دوسرے پر منطبق ہوتی ہیں، تو آواز کی شدت کے تھر تھرانے کا مظہر، ضربیں (Beats) کہلاتا ہے۔



شکل 15.15: ایک کھلے ہوئے پائپ میں مقیم لہریں، پہلے چار ہارمونک دکھائے گئے ہیں۔



شکل 15.14: ایک سرے پر کھلے ہوا کے کالم کے ارتعاش کے کچھ نارمل موڈ

واضح ہے کہ ایک 1.1 kHz تعدد کا وسیلہ، v_2 ، یعنی کہ دوسرے ہارمونک پر گمک کرے گا۔

اب اگر پائپ کا ایک سرابند کر دیا جائے (شکل 15.14)، تو مساوات

(15.44) سے اخذ کیا جاسکتا ہے کہ بنیادی تعدد ہے:

$$v_1 = \frac{v}{\lambda_1} = \frac{v}{4L} \quad (\text{ایک سرے پر بند پائپ})$$

سرلیے ستون (Musical Pillars)

مندروں میں ستونوں پر اکثر ایسی تصاویر بنائی جاتی ہیں، جن میں انسانوں کو ساز بجاتے دکھایا جاتا ہے۔ لیکن یہ ستون خود موسیقی شاذ و نادر ہی پیدا کرتے ہیں۔ تامل ناڈو میں نیل اپر (Nellaiappar) مندر میں



ایک ہی چٹان کے ٹکڑے سے بنائے گئے ستونوں کا ایک ایسا مجموعہ ہے، جس پر اگر آہستہ سے تھپتھپایا جائے تو ہندوستانی کلاسیکی موسیقی کے بنیادی سر نکلتے ہیں، یعنی کہ سارے، گا، ما، پا، دھا، فی، سا۔ ان ستونوں کے ارتعاش استعمال کے گئے پتھر کی چک، اس کی کثافت اور اس کی شکل پر منحصر ہیں۔

سرلیے ستونوں کی تین قسموں میں درجہ بندی کی جاتی ہے: پہلی قسم شرووتی ستون (Shruthi) کہلاتی ہے کیونکہ یہ بنیادی سر (سوار Swaras) پیدا کرتے ہیں۔ دوسری قسم گانا تھونگل (Gana Thoongal) ہے جو وہ بنیادی دھنیں پیدا کرتے ہیں جو ”راگ“ بناتی ہیں۔ تیسری قسم لے تھونگل (Lay Thongal) ستونوں کی ہے جو ”تال“ (ضرب Beats) پیدا کرتے ہیں۔ نیل اپر مندر کے ستون شرووتی اور لے تھونگل کے ستونوں کا مجموعہ ہیں۔ ماہرین آثار قدیمہ، نیل اپر مندر کو ساتویں صدی کا بنا ہوا بتاتے ہیں اور ان کا دعویٰ ہے کہ اسے پانڈیان سلاطین نے بنوایا تھا۔

نیل اپر کے سرلیے ستون اور جنوبی ہند کے کئی دوسرے مندروں، جیسے ہام بھی (تصور)، کنیا کماری اور تھرووان تھاپورم کے مندروں کے ستون اس ملک کی انفرادیت ہیں اور دنیا کے کسی حصے میں ان جیسی کوئی مثال نہیں ملتی۔

ω_{beat} دی جاتی ہے:

$$\nu_{beat} = \nu_1 - \nu_2 \quad (15.48)$$

آئیے معلوم کریں کہ کیا ہوتا ہے جب دو لہریں، جن کے تعدد میں معمولی سا فرق ہے، ایک دوسرے پر منطبق کی جاتی ہیں۔ فرض کیجیے کہ ایک خاص مقام پر دونوں آواز کی لہروں کے نقل کے وقت تابع تغیرات دیے جاتے ہیں:

$$s_1 = a \cos \omega_1 t, \quad s_2 = a \cos \omega_2 t \quad \omega_1 > \omega_2 \quad (15.45)$$

جہاں ہم نے آسانی کے لیے فرض کر لیا ہے کہ دونوں لہروں کی سعتیں اور فیزیکس ہیں۔ انطباق کے اصول کے مطابق، ماحصل نقل ہے۔

$$s = s_1 + s_2 = a (\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t)$$

$$= 2a \cos \frac{(\omega_1 - \omega_2)t}{2} \cos \frac{(\omega_1 + \omega_2)t}{2} \quad (15.46)$$

$$\omega_b = \frac{(\omega_1 - \omega_2)}{2}, \quad \omega_a = \frac{(\omega_1 + \omega_2)}{2}:$$

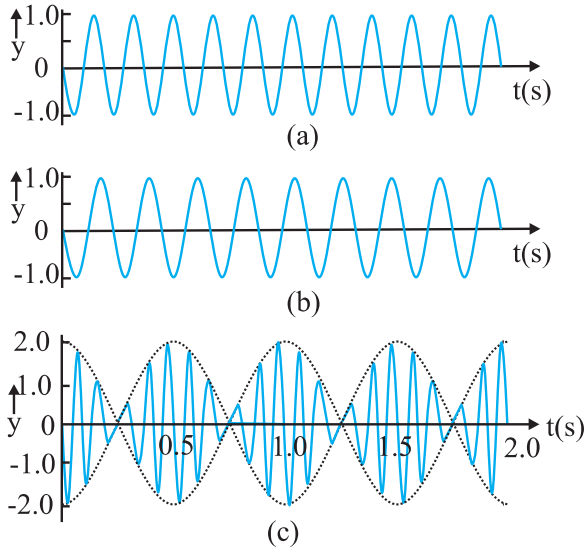
اگر ہم لکھیں: تب مساوات (15.46) لکھی جاسکتی ہے:

$$s = [2a \cos \omega_b t] \cos \omega_a t \quad (15.47)$$

$$|\omega_1 - \omega_2| \ll \omega_1, \omega_2, \omega_a \gg \omega_b, \text{ اگر}$$

تب مساوات (15.47) میں اصل وقت انحصار اس کو سائن تفاعل سے آتا ہے، جس کا زاویائی تواتر ω_a ہے۔ تو سین میں دی ہوئی مقدار کو اس تفاعل کا سعت سمجھا جاسکتا ہے (جو مستقل نہیں ہے، بلکہ اس میں زاویائی تعدد کی خفیف تبدیلی ω_b شامل ہے)۔ یہ از حد ہو جاتا ہے، جب بھی $\cos \omega_b t$ کی قدر (+1) یا (-1) ہوتی ہے۔ کیونکہ ω_1 اور ω_2 کی قدریں ایک دوسرے کے بہت نزدیک ہیں، ω_a اور ان دونوں میں سے کسی ایک میں بھی فرق کر پانا آسان نہیں ہے۔ اس لیے تقریباً یکساں تعدد والی دو لہروں کے انطباق کا نتیجہ ایک ایسی لہر ہے، جس کا زاویائی تعدد تقریباً یکساں ہے لیکن سعت مستقل نہیں ہے۔ اس لیے، ماحصل آواز لہر کی شدت ایک زاویائی تعدد $\omega_{beat} = 2\omega_b = \omega_1 - \omega_2$ کے ساتھ تبدیل ہوتی ہے۔ اب رشتہ:

$\omega = 2\pi\nu$ استعمال کرتے ہوئے، ضرب تعدد (Beat Frequency)



شکل 15.16: (a) 1 Hz تعدد کی ہارمونی لہر کا گراف
(b) 9 Hz تعدد کی ہارمونی لہر کا گراف (c) (a) اور (b) کا انطباق - جس میں 2 Hz تعدد کی ضربیں (Beats) دکھائی گئی ہیں۔

جائے اور اس وقت تک ٹیون کیا جاتا رہا ہے جب تک بیٹ غائب نہ ہو جائے، تو ساز اس معیار کے ساتھ لے میں (ٹیون کیا ہو) ہوتا ہے۔

مثال 15.6: ستار کے دو تار A اور B جن سے سر دھا، نکل رہے ہیں، ایک دوسرے سے پوری طرح لے میں نہیں ہیں اور 5 Hz تعدد کی ضرب پیدا کر رہے ہیں۔ تار B کے تناؤ میں تھوڑا سا اضافہ کیا گیا تو ضرب کا تعدد کم ہو کر 3 ہو گیا۔ B کا آغازی تعدد کیا ہے، اگر A کا تعدد 427 Hz ہے۔

جواب: ایک تار کے تناؤ میں اضافہ، اس کے تعدد میں اضافہ کرتا ہے اگر B کا آغازی تعدد (ν_b) ، A کے تعدد سے زیادہ ہوتا تو (ν_b) میں مزید اضافہ سے ضرب تعدد بڑھنا چاہیے تھا۔ لیکن ضرب تعدد کم ہو رہا ہے۔ اس سے معلوم ہوتا ہے $\nu_b < \nu_a$ ، کیونکہ $\nu_a - \nu_b = 5 \text{ Hz}$ اور $\nu_a = 427 \text{ Hz}$ ہمیں ملتا ہے، $\nu_b = 422 \text{ Hz}$

15.8 ڈوپلر اثر (DOPPLER EFFECT)

یہ روزمرہ کا تجربہ ہے کہ ایک تیزی سے حرکت کرتی ہوئی ریل گاڑی جب ہم

ایک کھلے پائپ میں آواز کا انعکاس (Reflection of sound in an open pipe)

جب ایک زیادہ دباؤ والی ہوا کی پلس، ایک کھلے پائپ میں حرکت کرتے ہوئے دوسرے سرے تک پہنچتی ہے، تو اس کا معیار حرکت ہوا کو باہر کھلے میں دھکیل دیتا ہے، جہاں دباؤ تیزی سے گر کر فضائی دباؤ پر آ جاتا ہے۔ اس لیے اس

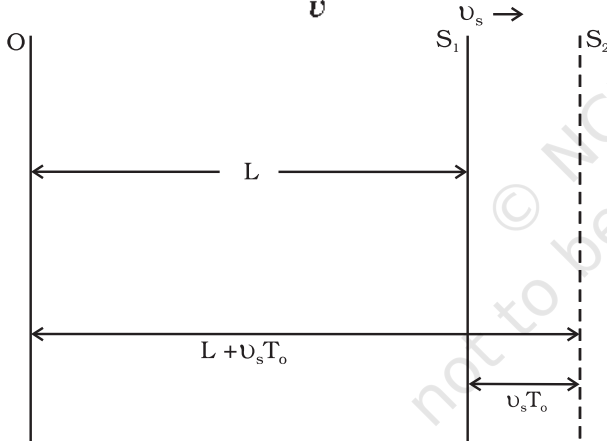


کے پیچھے آنے والی ٹیوب میں، ہوا باہر نکل جاتی ہے۔ ٹیوب کے سرے پر کم دباؤ ٹیوب میں اوپر کی ہوا کھینچتا ہے۔ ہوا کھلے سرے کی طرف کھینچتی ہے، جس کم دباؤ والا علاقہ اوپر کی طرف حرکت کرتا ہے۔ جس کے نتیجے میں زیادہ دباؤ کی ہوا کی، نیچے کی سمت میں حرکت کرتی ہوئی، پلس کم دباؤ کی ہوا کی، اوپر کی سمت میں حرکت کرتی ہوئی پلس میں بدل جاتی ہے۔ ہم کہتے ہیں کہ کھلے سرے پر ایک دباؤ لہر، 180° فیز کی تبدیلی کے ساتھ، منعکس ہوئی ہے۔ ایک کھلے پائپ آرگن، جیسے بانسری، میں مقیم لہریں، اسی مظہر کا نتیجہ ہیں۔ اس نتیجہ کا مقابلہ اس سے کیجیے جو زیادہ دباؤ کی ہوا کے بند سرے پر پہنچنے سے ہوتا ہے: یہ تصادم کرتی ہے اور اس کے نیچے میں ہوا کو مخالف سمت میں پیچھے دھکیلتی ہے۔ یہاں ہم کہتے ہیں کہ دباؤ لہر، بغیر کسی فیز تبدیلی کے، منعکس ہوئی ہے۔

اس لیے ہم کم۔ زیادہ ہوتی ہوئی شدت کی آواز سنتے ہیں، جس کا تعدد، منطبق ہونے والی لہروں کے تعدد کا فرق ہوتا ہے۔ تعدد 11 Hz اور تعدد 9 Hz کی دو لہروں کے وقت نقل گراف شکل 15.16 (a) اور 15.16 (b) میں دکھائے گئے ہیں۔ ان کے انطباق کا نتیجہ شکل 15.16 (c) میں دکھایا گیا ہے۔ موسیقی کا اپنے سازوں کی لے ملانے (انہیں ٹیون کرنے) میں ضرب مظہر استعمال کرتے ہیں۔ اگر ایک ساز کو ایک معیاری تعدد کے سامنے بجایا

حالت سکون پر ہے۔ فرض کیجیے کہ ایک زاویائی تعدد ω اور T_0 کی لہر رفتار v ہے اور ω اور T_0 ایک ایسے مشاہد کے ذریعے ناپے جاتے ہیں جو واسطے کی مناسبت سے حالت سکون پر ہے۔ ہم فرض کرتے ہیں کہ مشاہد کے پاس ایک ایسا شناس کار (Detector) ہے جو اس پر پہنچنے والے لہر کے ہر فراز کو، اس کے پہنچنے ہی، شمار کرتا ہے۔ جیسا شکل 15.17 میں دکھایا گیا ہے۔ وقت $t=0$ پر، وسیلہ نقطہ S_1 پر ہے، جو مشاہد سے فاصلہ L پر واقع ہے اور ایک فراز خارج کرتا ہے۔ یہ مشاہد تک وقت $t_1 = L/v$ پر پہنچتا ہے۔ وقت $t = T_0$ پر، وسیلہ ایک فاصلہ $v_s T_0$ طے کر چکا ہوگا اور اب یہ نقطہ S_2 پر ہے، جو مشاہد سے فاصلہ $(L + v_s T_0)$ پر واقع ہے۔ پوسیلہ دوسرے فراز کا اخراج کرتا ہے۔ یہ مشاہد تک پہنچتا ہے وقت t_2 پر:

$$t_2 = T_0 + \frac{(L + v_s T_0)}{v}$$



شکل 15.17: v_s رفتار سے حرکت کرتا ہوا ایک وسیلہ نقطہ S_1 پر ایک لہر فراز خارج کرتا ہے۔ $v_s T_0$ فاصلہ طے کرنے کے بعد، S_2 پر یہ اگلا لہر فراز خارج کرتا ہے۔

وقت nT_0 پر، وسیلہ $(n+1)^{th}$ فراز خارج کرتا ہے اور یہ مشاہد تک وقت t_{n+1} پر پہنچتا ہے:

$$t_{n+1} = nT_0 + \frac{(L + nv_s T_0)}{v}$$

اس لیے، وقفہ وقت

$$\left[nT_0 + \frac{(L + nv_s T_0)}{v} - \frac{L}{v} \right]$$

سے دور ہوتی جاتی ہے تو اس کی سیٹی کا سر (Pitch) یا تعدد کم ہوتا جاتا ہے۔ اور جب ہم کسی آواز کے قائم (غیر متحرک) منبع (Source) کی طرف تیزی سے جاتے ہیں، تو سنائی دینے والی آواز کی چھ، منبع کی چھ سے زیادہ معلوم ہوتی ہے۔ جیسے جیسے مشاہد، وسیلے سے دور جاتا ہے تو سنائی دینے والی چھ یا تعدد وسیلے کی چھ سے نیچی ہوتی جاتی ہے۔ یہ حرکت۔ منسلک تعدد تبدیلی، ڈوپلر اثر (Doppler effect) کہلاتا ہے۔ آسٹریلیائی طبیعیات داں، جون کرٹسٹین ڈوپلر نے سب سے پہلے 1842 میں یہ اثر تجویز کیا۔ ہارزیلٹ (Buys Ballot) نے 1845 میں ہولینڈ میں اس کی تجربہ کے ذریعے جانچ کی۔ ڈوپلر اثر ایک لہر، مظہر ہے۔ یہ صرف آواز کے لیے ہی نہیں بلکہ برقی مقناطیسی لہروں کے لیے بھی صادق ہے۔ حالانکہ، اس وقت ہم صرف آواز کی لہروں کو ہی لیں گے۔

ہم تین مختلف صورتوں میں تعدد میں ہونے والی تبدیلیوں کا تجزیہ کریں گے:

- (1) مشاہد، مقیم (Stationary) ہے اور وسیلہ (Source) حرکت کر رہا ہے،
- (2) مشاہد حرکت کر رہا ہے اور وسیلہ مقیم ہے،
- (3) مشاہد اور وسیلہ دونوں حرکت کر رہے ہیں۔

حالت (1) اور (2) مشاہد اور واسطے کے درمیان اضافی حرکت (Relative motion) کی موجودگی یا غیر موجودگی کی وجہ سے ایک دوسرے سے مختلف ہیں۔ زیادہ تر لہروں کو اشاعت کے لیے واسطے کی ضرورت ہوتی ہے، لیکن برقی مقناطیسی لہروں کو اپنی اشاعت کے لیے واسطے کی ضرورت نہیں ہوتی۔ اگر کوئی واسطہ موجود نہ ہو تو چاہے وسیلہ حرکت کرے یا مشاہد حرکت کرے ڈوپلر شفٹ (Doppler Shift) یکساں ہوتی ہے، کیونکہ اب دونوں صورتوں میں فرق کرنے کا کوئی ذریعہ نہیں ہے۔

15.8.1 وسیلہ متحرک: مشاہد قائم

(Source moving ; observer stationary)

ہم یہ قرار داد (Convention) منتخب کرتے ہیں کہ رفتار کی مثبت سمت مشاہد سے وسیلہ کی طرف ہے۔ فرض کیجیے کہ ایک وسیلہ S رفتار v_s سے حرکت کر رہا ہے اور ایک وسیلہ اس فریم میں قائم ہے، جس میں واسطہ بھی

حالت سکون پر ہے، ہمیں ڈوپلر شفٹ مشتق کرنے کے لیے مختلف طریقہ اختیار کرنا ہوگا۔ ہم حرکت کرتے ہوئے مشاہد کے حوالہ فریم میں کام کرتے ہیں۔ اس حوالہ فریم میں وسیلہ (Source) اور واسطہ (Medium) رفتار v_0 سے نزدیک آرہے ہیں اور لہر رفتار $v_0 + v$ سے نزدیک آرہی ہے۔ جو طریقہ کچھلی صورت میں اختیار کیا تھا، اس پر عمل کرتے ہوئے، ہم معلوم کرتے ہیں کہ پہلے اور $(n+1)^{th}$ فرازی کی آمد میں وقفہ وقت ہے:

$$t_{n+1} - t_1 = n T_0 - \frac{nv_0 T_0}{v_0 + v}$$

اس لیے، مشاہد، لہر کا دور ناپتا ہے:

$$= T_0 \left(1 - \frac{v_0}{v_0 + v} \right)$$

$$= T_0 \left(1 + \frac{v_0}{v} \right)^{-1}$$

جس سے حاصل ہوتا ہے

$$v = v_0 \left(1 + \frac{v_0}{v} \right) \quad (15.53)$$

اگر v_0/v خفیف ہے تو ڈوپلر شفٹ تقریباً یکساں ہے، چاہے مشاہد حرکت کر رہا ہو، وسیلہ، کیونکہ تقریبی رشتے مساوات (15.53) اور مساوات (15.51) یکساں ہیں۔

15.8.3 وسیلہ اور مشاہد دونوں حرکت کر رہے ہیں

(Both source and observer moving)

اب ہم ڈوپلر شفٹ کے لیے ایک مجموعی عبارت مشتق کریں گے، جب کہ وسیلہ اور مشاہد رفتاروں v_s اور v_0 سے، حسب ترتیب، حرکت کر رہے ہیں، جیسا کہ شکل 15.18 میں دکھایا گیا ہے۔ فرض کیجیے کہ وقت $t=0$ پر مشاہد O_1 پر ہے، اور وسیلہ S_1 پر ہے، O_1 کی بائیں طرف ہے۔ وسیلہ، رفتار v تعداد v اور دور T_0 کی ایک لہر خارج کرتا ہے، اور یہ سب اس مشاہد کے ذریعے ناپے جاتے ہیں جو واسطہ کی مناسبت سے حالت سکون پر ہے۔ فرض کیجیے $t=0$ پر O_1 اور S_1 کے درمیان فاصلہ L ہے، جب کہ وسیلہ پہلا فراز

میں مشاہد کا شناس کار n فراز شمار کرتا ہے اور مشاہد لہر کا دور بہ طور T ریکارڈ کرتا ہے، جو دیا جاتا ہے:

$$T = \left[nT_0 + \frac{(L + nv_s T_0)}{v} - \frac{L}{v} \right] / n$$

$$= T_0 + \frac{v_s T_0}{v}$$

$$= T_0 \left(1 + \frac{v_s}{v} \right) \quad (15.49)$$

مساوات (15.49) کو تعداد v اور v_0 کی شکل میں لکھا جاسکتا ہے، جہاں v_0 وہ تعداد ہے جو ناپی جاتی جاتی، اگر وسیلہ اور مشاہد دونوں قائم ہوتے v وہ تعداد ہے جو وسیلہ کے حرکت کرتے وقت ناپی گئی ہے۔

$$v = v_0 \left(1 + \frac{v_s}{v} \right)^{-1} \quad (15.50)$$

اگر v_s ، v کے مقابلے میں چھوٹی ہے تو دو رکنی توسیع (Binomial expansion) میں $\frac{v_s}{v}$ کے پہلے درجہ کے رکن کو برقرار رکھتے ہوئے اور اس سے اونچے درجات کے رکنوں کو نظر انداز کرتے ہوئے، مساوات (15.50) لکھی جاسکتی ہے

$$v = v_0 \left(1 - \frac{v_s}{v} \right) \quad (15.51)$$

اگر ایک وسیلہ، مشاہد کے نزدیک آرہا ہو تو v_s کو $(-v_s)$ سے تبدیل کر دیتے ہیں، اور

$$v = v_0 \left(1 + \frac{v_s}{v} \right) \quad (15.52)$$

اس لیے مشاہد کم تعداد ناپتا ہے، جب کہ وسیلہ اس سے دور جا رہا ہو، بہ مقابلہ اس تعداد کے جب کہ وسیلہ حالت سکون پر ہو، اسی طرح زیادہ تعداد ناپتا ہے جب کہ وسیلہ اس کے نزدیک آرہا ہو بہ مقابلہ اس تعداد کے جب کہ وسیلہ حالت سکون پر ہو۔

15.8.2 مشاہد حرکت کر رہا ہے، وسیلہ قائم ہے

(Observer moving; source stationary)

اب جب کہ مشاہد رفتار v_0 سے وسیلہ کی طرف حرکت کر رہا ہے اور وسیلہ

درمیان نیا فاصلہ $S_2 O_2$ ہوگا: $[L + v_s - v_o]$ پر وسیلہ دوسرا

فراز خارج کرتا ہے۔ یہ مشاہد تک وقت t_2 پر پہنچتا ہے:

$$t_2 = \frac{T_0 + [L + (v_s - v_o)T_0]}{(v + v_o)}$$

اسی لیے وقفہ وقت $(t_{n+1} - t_1)$

$$= \frac{nT_0 + [L + n(v_s - v_o)T_0]}{(v + v_o)} - \frac{L}{(v + v_o)}$$

میں مشاہد n فراز شمار کرتا ہے اور مشاہد لہر کا دور T کے مساوی ریکارڈ کرتا ہے، جو دیا جاتا ہے۔

$$T = T_0 \left(1 + \frac{v_s - v_o}{v + v_o} \right) = T_0 \left(\frac{v + v_s}{v + v_o} \right) \quad (15.54)$$

مشاہد کے ذریعے ناپا گیا تعدد v دیا جاتا ہے:

$$v = v_o \left(\frac{v + v_o}{v + v_s} \right) \quad (15.55)$$

ایک مسافر کو لیجیے جو ایک سیدھی پٹری پر چلتی ہوئی ریل گاڑی میں بیٹھا ہے۔ فرض کیجیے وہ ٹرین کے ڈرائیور کے ذریعے بجائی گئی سیٹی سنتا ہے۔ وہ کیا تعدد سنے گا یا ناپے گا؟ یہاں مشاہد اور وسیلہ دونوں یکساں رفتار سے حرکت کر رہے ہیں، اس لیے تعدد میں کوئی شفٹ نہیں ہوگی اور مسافر قدرتی تعدد ہی سنے گا۔ لیکن ایک ٹرین کے باہر کھڑا ہوا مشاہد، جو کہ پٹری کی مناسبت سے مقیم ہے، قدرتی تعدد سے زیادہ تعدد سنے گا، اگر ریل گاڑی اس کی طرف آرہی ہے اور کم تعدد سنے گا اگر ریل گاڑی اس سے دور جا رہی ہے۔

نوٹ کریں کہ ہم نے مشاہد سے وسیلہ کی سمت میں مثبت سمت معرف کی تھی۔ اس لیے، اگر مشاہد واسطے کی طرف حرکت کر رہا ہے تو v_o کی مثبت (عددی) قدر ہوگی اور اگر S, O سے دور جا رہا ہے تو v_o کی منفی قدر ہوگی۔ دوسری طرف، اگر S, O سے دور جا رہا ہے تو v_s کی مثبت قدر ہوگی اور اگر وہ O کی طرف حرکت کر رہا ہے تو v_s کی منفی قدر ہوگی۔ وسیلے کے ذریعے خارج کی گئی آواز تمام سمتوں میں جاتی ہے۔ مشاہد، آواز کا وہ حصہ شناس کرتا ہے جو اس کی طرف آتا ہے۔ اس لیے مشاہد کی مناسبت سے، آواز کی اضافی رفتار، تمام صورتوں میں، $v + v_o$ ہے۔

ڈوپلر اثر کا استعمال

(Application of Doppler effect)

ڈوپلر اثر کی وجہ سے ایک حرکت کرتی ہوئی شے کی تعدد میں ہونے والی تبدیلی کا استعمال، مختلف مقامات پر، جیسے فوج، طبی سائنس، علم فلکیات وغیرہ، شے کی رفتار ناپنے کے لیے کیا جاتا ہے۔ پولس بھی اس کا استعمال سواروں کی مقررہ حد سے زیادہ تیز رفتار کو جانچنے کے لیے کرتی ہے۔ حرکت کرتی ہوئی شے کی جانب، ایک آواز کی لہر یا برقی۔ مقناطیسی لہر، جس کا تعدد معلوم ہے، بھیجی جاتی ہے۔ اس لہر کا کچھ حصہ شے سے منعکس ہوتا ہے اور اس کا تعدد، نگرانی کر رہے اسٹیشن کے ذریعے، ناپا جاتا ہے۔ تعدد میں آئی یہ تبدیلی، ڈوپلر شفٹ کہلاتی ہے۔

ہوائی اڈوں پر اس کا استعمال جہازوں کی راہ نمائی کرنے اور فوج میں، دشمن کے جہازوں کو شناس کرنے میں کیا جاتا ہے۔ علم فلکیات میں یہ ستاروں کی رفتار کی پیمائش میں استعمال ہوتا ہے۔

ڈاکٹر، دل کی دھڑکن اور جسم کے مختلف حصوں میں دوران خون کا مطالعہ کرنے کے لیے اسے استعمال کرتے ہیں۔ یہاں وہ بالاصوتی لہریں (Ultrasonic waves)، عام طور سے، استعمال کرتے ہیں اور یہ طریقہ صوتی ترسیم (Sonography) کہلاتا ہے۔ بالاصوتی لہریں، انسان کے جسم میں داخل ہوتی ہیں، ان میں سے کچھ واپس منعکس ہو جاتی ہیں اور خون کی حرکت، دل کے والوں (Volves) کی دھڑکن اور یہاں تک کہ جنین (Foetus) کے دل کی دھڑکن، کے بارے میں معلومات فراہم کرتی ہیں۔ دل کی صورت میں، ان کے ذریعے بنائی گئی تصویر گونج قلبی نگارش (Echocardiogram) کہلاتی ہے۔

خارج کرتا ہے۔ اب کیونکہ مشاہد حرکت کر رہا ہے، اس لیے مشاہد کی مناسبت سے لہر کی رفتار $v + v_o$ ہے۔ اس لیے پہلا فراز مشاہد تک وقت t_1 پر پہنچتا ہے: $t_1 = L / (v + v_o)$ وقت $t = T_0$ پر مشاہد اور وسیلہ دونوں اپنے نئے مقامات، بالترتیب، O_2 اور S_2 پر پہنچ گئے ہیں۔ مشاہد اور وسیلہ کے

جواب: (1) مشاہدہ حالت سکون پر ہے اور وسیلہ رفتار 200 m s^{-1} سے حرکت کر رہا ہے۔ کیونکہ یہ رفتار آواز کی رفتار 330 m s^{-1} سے قابل مقابلہ ہے، اس لیے ہمیں مساوات (15.50) استعمال کرنا ہوگی، مساوات (15.51) سے دیا گیا تقریبی رشتہ نہیں۔ کیونکہ وسیلہ، ایک مقیم نشانہ کی طرف آرہا ہے، $v_0 = 0$ اور v_s کو $-v_s$ بدلنا ہوگا:

$$v = v_0 \left(1 - \frac{v_s}{v} \right)^{-1}$$

$$v = 1000 \text{ Hz} \times \left[\frac{1 - 200 \text{ m s}^{-1}}{[330 \text{ m s}^{-1}]^{-1}} \right]^{-1}$$

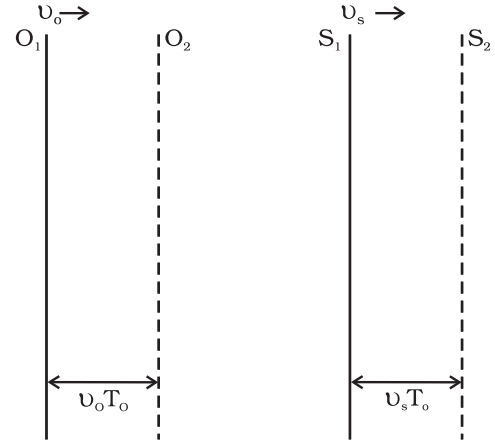
$$\approx 2540 \text{ Hz}$$

اب نشانہ وسیلہ ہے (کیونکہ یہ گونج کا منبع ہے) اور راکٹ کا شناس اب شناس یا مشاہدہ ہے (کیونکہ یہ گونج شناس کرتا ہے)۔ اس لیے $v_s = 0$ اور v_0 کی مثبت قدر ہے۔ اس لیے وسیلہ (نشانہ) کے ذریعہ خارج کی گئی آواز کا تعدد v ہے اور نشانے کے ذریعے وصول کیا گیا تعدد v_0 نہیں ہے۔ اس لیے وہ تعدد جو راکٹ ناپے گا، ہے۔

$$v' = v \left(\frac{v + v_0}{v} \right)$$

$$= 2540 \text{ Hz} \times \left(\frac{200 \text{ m s}^{-1} + 330 \text{ m s}^{-1}}{330 \text{ m s}^{-1}} \right)$$

► $\approx 4080 \text{ Hz}$



شکل 15.18: مشاہدہ O اور وسیلہ S دونوں رفتاروں v_0 اور v_s

سے، بالترتیب، حرکت کر رہے ہیں۔ وقت $t=0$ پر وہ مقام O_1 اور S_1 پر ہیں، جبکہ وسیلہ آواز کا پہلا فراز خارج کرتا ہے، جس کی رفتار، واسطے کی مناسبت سے v ہے۔ ایک دورے بعد $t - T_0$ ، وہ بالترتیب O_2 اور S_2 تک حرکت کر چکے ہیں، اور انہوں نے فاصلہ $v_0 T_0$ اور $v_s T_0$ طے کیا ہے، جب کہ وسیلہ دوسرا فراز خارج کرتا ہے۔

مثال 15.7: ایک راکٹ ایک مقیم نشانے کی طرف 200 m s^{-1}

کی چال سے حرکت کر رہا ہے۔ حرکت کرتے ہوئے وہ 1000 Hz تعدد کی لہر خارج کرتا ہے۔ نشانے تک پہنچنے والی کچھ آواز راکٹ تک، ایک گونج کی شکل میں، منعکس ہو کر واپس پہنچتی ہے۔ حساب لگائیے: (1) نشانے کے ذریعے شناس کی گئی آواز کا تعدد (2) راکٹ کے ذریعے شناس کیا گیا، گونج کا تعدد۔

خلاصہ (Summary)

1. میکینیکل لہریں، مادی واسطوں میں ہی رہ سکتی ہیں اور ان پر نیوٹن کے قوانین لاگو ہوتے ہیں۔
2. عرضی لہریں وہ لہریں ہیں جن میں واسطے کے ذرات، لہر کی اشاعت کی سمت کی عمودی سمت میں اهتزاز کرتے ہیں۔
3. طولی لہریں وہ لہریں ہیں جن میں واسطے کے ذرات، لہر کی اشاعت کی سمت میں اهتزاز کرتے ہیں۔
4. رواں لہر وہ لہر ہے جو واسطے کے ایک نقطے سے دوسرے نقطے تک حرکت کرتی ہے۔
5. مثبت x-سمت میں حرکت کرتی ہوئی ایک سائن غم نما لہر کا نقل دیا جاتا ہے:

$$y(x, t) = a \sin(kx - \omega t + \phi)$$

جہاں a لہر کی سمت ہے، k زاویائی لہر عدد ہے، ω زاویائی تعدد ہے، $(kx - \omega t + \phi)$ فیز ہے اور ϕ فیز مستقلہ یا فیز زاویہ ہے۔
6. ایک رواں لہر کی طول لہر λ ، ایک دیے ہوئے وقت پر، یکساں فیز کے دو متواتر نقطوں کے درمیان فاصلہ ہے۔ ایک قائم لہر میں یہ دو متواتر نوڈ یا اینٹی نوڈ کے درمیان فاصلے کا دگنا ہے۔

7. ایک لہر کے ارتزاز کے دور T کی تعریف اس طرح کی جاتی ہے یہ وہ وقت ہے جو واسطہ کا کوئی بھی جز ایک مکمل ارتزاز سے گزرنے میں لیتا ہے۔ یہ زاویائی تعدد ω سے مندرجہ ذیل رشتے سے منسلک ہے

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

8. ایک لہر کے تعدد کی تعریف بہ طور $1/T$ کی جاتی ہے، اور اس کا زاویائی تعدد سے رشتہ ہے:

$$f = \frac{\omega}{2\pi}$$

9. ایک رواں لہر کی رفتار دی جاتی ہے: $v = \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T} = \lambda f$

10. ایک تنی ہوئی ڈوری پر، ایک عرضی لہر کی رفتار، ڈوری کی خاصیتوں سے متعین ہوتی ہے۔ ایک ڈوری پر، جس میں تناؤ T ہو اور جس کی خطی کمیت کثافت μ ہو آواز کی رفتار ہے:

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

11. آواز کی لہریں وہ طولی میکانیکی لہریں ہیں جو ٹھوس اشیاء، رقیق اشیاء اور گیسوں میں سے گزر سکتی ہیں۔

ایک رقیق میں، جس کا حجم مقیاس B اور کثافت S ہو، آواز کی رفتار ہے: $v = \sqrt{\frac{B}{S}}$
ایک دھات کی بنی چھڑ میں طولی لہروں کی رفتار ہے۔

$$v = \sqrt{\frac{Y}{\rho}}$$

گیسوں کے لیے، کیونکہ $B = \gamma P$ ، اس لیے آواز کی رفتار ہے۔

$$v = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}}$$

12. جب دو یا دو سے زیادہ لہریں، ایک ہی واسطے سے بہ یک وقت گذرتی ہیں، تو واسطے کے کسی بھی جز کا نقل، ہر لہر کی وجہ سے ہونے والے انفرادی نقل کا الجبرائی حاصل جمع ہوتا ہے۔ یہ لہروں کے انطباق کا اصول کہلاتا ہے:

$$y = \sum_{i=1}^n f_i(x - vt)$$

13. ایک ہی ڈوری پر حرکت کر رہی دوساں خم نما لہریں، تداخل دکھاتی ہیں، یعنی انطباق کے اصول کے مطابق جمع یا تسیخ ہوتی ہے۔ اگر دونوں ایک ہی سمت میں حرکت کر رہی ہوں اور دونوں کی سعت a اور تعدد یکساں ہو، لیکن فیز میں ایک فیز مستقل ϕ کا فرق ہو تو نتیجہ میں ایک واحد لہر حاصل ہوتی ہے، جس کا تعدد بھی ω ہوتا ہے۔

$$y(x, t) = \left[2a \cos \frac{1}{2} \phi \right] \sin \left(kx - \omega t + \frac{1}{2} \phi \right)$$

اگر $\phi = 0$ یا 2π کا صحیح عدد ہو، تو لہریں بالکل درست طور پر فیز میں ہوتی ہیں اور تداخل تعمیری ہوتا ہے، اگر $\phi = \pi$ ہو تو ہو بالکل درست طور پر فیز کے باہر ہوتی ہیں اور تداخل تخریبی ہوتا ہے۔

14. ایک رواں لہر، ایک استوار سرحد یا بند سرے پر فیز کے الٹنے کے ساتھ، منعکس ہوتی ہے، جب کہ ایک کھلی سرحد پر انعکاس بغیر کسی فیز کی تبدیلی کے ہوتا ہے۔

ایک واقع لہر کے لیے

$$y_i(x, t) = a \sin(kx - \omega t)$$

استوار سرحد پر منعکس لہر ہے:

$$y_r(x, t) = -a \sin(kx + \omega t)$$

ایک کھلی سرحد پر انعکاس کے لیے:

$$y_r(x, t) = a \sin(kx + \omega t)$$

15. مخالف سمتوں میں حرکت کرتی ہوئی دو متماثل لہروں کا تداخل ”قائم لہریں“ پیدا کرتا ہے۔ ایک ڈوری میں، جس کے دونوں سرے بندھے ہوں، قائم لہر دی جاتی ہے

$$y(x, t) = [2 \sin kx] \cos \omega t$$

قائم لہروں کی خاصیت، صفر نقل کے متعین مقامات ہیں جو نوڈ کہلاتے ہیں اور از حد نقل کے متعین مقامات ہیں جو اینٹی نوڈ کہلاتے ہیں۔ دو متواتر نوڈ یا اینٹی نوڈ کے درمیان $\lambda/2$ فاصلہ ہوتا ہے۔

ایک تہی ہوئی رسی، جس کے دونوں سرے بندھے ہوں اور جس کی لمبائی L ہو، مندرجہ ذیل تعدد سے ارتزاز کرتی ہے:

$$v = \frac{nv}{2L}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

مندرجہ بالا رشتے سے دیے گئے تعددوں کا سیٹ، نظام کے ارتزاز کے نارمل موڈ کہلاتے ہیں۔ کم ترین تعدد کا ارتزاز موڈ، بنیادی موڈ یا پہلا ہارمونک کہلاتا ہے۔ دوسرا ہارمونک، $n=2$ کے ساتھ ارتزاز موڈ ہے، اور اسی طرح آگے بھی۔

ایک لمبائی L کا پائپ، جس کا ایک سر بند ہوا اور دوسرا سر اکھلا ہو (جیسے ہوا کالم)، مندرجہ ذیل رشتے سے دیے گئے تعدد کے ساتھ ارتزاز کرتا ہے۔

$$v = (n + \frac{1}{2}) \frac{v}{2L} \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

مندرجہ بالا رشتے سے دیے گئے تعددوں کا سیٹ، اس قسم کے نظام کے ارتزاز کے نارمل موڈ ہیں۔ $\frac{v}{4L}$ سے دیا جانے والا کم ترین تعدد بنیادی نوڈ یا پہلا ہارمونک ہے۔

16. دونوں سروں پر بندھی ہوئی L لمبائی کی ڈوری یا ایک سرے پر بندھی اور ایک سرے پر کھلا ہوا یا دونوں سروں پر کھلا ہوا کالم جن مخصوص تعددوں سے ارتزاز کرتے ہیں وہ ان کے نارمل موڈ کہلاتے ہیں۔ ان میں سے ہر ایک تعدد، نظام کا گمگ دار تعدد ہے۔

17. ضربیں (Beats) تب بنتی ہیں جب دو ایسی لہریں منطبق ہوتی ہیں، جن کے تعدد v_1 اور v_2 میں معمولی فرق ہوتا ہے اور جن کی سعتیں قابل مقابلہ ہوتی ہیں۔ ضرب تعدد ہے:

$$v_{\text{beats}} = v_1 \sim v_2$$

18. ڈوپلر اثر، ایک لہر کے اس وقت ناپے گئے تعدد میں تبدیلی ہے جب وسیلہ S یا مشاہد (o) یا وسیلہ اور مشاہد دونوں، واسطے کی مناسبت سے حرکت کر رہے ہوں۔ آواز کے لیے، ناپی گئی تعدد v وسیلہ کے تعدد v_0 کی شکل میں دیا جاتا ہے:

$$v = v_0 \left(\frac{v + v_0}{v + v_s} \right)$$

یہاں v واسطے میں آواز کی رفتار ہے، v_0 مشاہد کی واسطے کے مناسبت سے رفتار ہے اور v_s وسیلہ کے واسطے کی مناسبت سے رفتار ہے۔ اس فارمولہ کو استعمال کرنے میں، v_s کی سمت میں جو رفتاریں ہوں انہیں مثبت اور جو اس کے مخالف ہوں انہیں منفی لینا چاہیے۔

طبعی مقدار	علامت	ابعاد	اکائی	ریمارک
طول موج	λ	[L]	m	یکساں فیز کے دو متواتر نقطوں کے درمیان فاصلہ
اشاعت مستقلہ	k	[L ⁻¹]	m ⁻¹	$k = 2\pi / \lambda$
لہر چال	v	[LT ⁻¹]	ms ⁻¹	$v = v\lambda$
ضرب تعدد	v_{beat}	[T ⁻¹]	s ⁻¹	منطبق لہروں کے دو نزدیکی تعددوں کا فرق

قابل غور نکات

1. ایک لہر، واسطے میں مادہ کی مجسم طور پر حرکت نہیں ہے۔ ہوا کا چلنا اور ہوا میں آواز کی لہر کا گزرنا ایک دوسرے سے مختلف ہیں۔ اول الذکر میں ایک مقام سے دوسرے مقام تک ہوا کی حرکت شامل ہے۔ آخر الذکر میں ہوا کی پرتوں کے داب اور ابتلا ف شامل ہیں۔
2. ایک لہر میں، ایک نقطے سے دوسرے نقطے تک توانائی منتقل ہوتی ہے، مادہ نہیں۔
3. کسی میکانیکی لہر میں توانائی کی منتقلی، واسطے کے نزدیک ارتزاز کرتے ہوئے جزیوں کے درمیان پکیلی تو توں کے ذریعے جھنگلی کی وجہ سے ہوتی ہے۔

4. عرضی لہریں صرف انہیں واسطوں میں سے گزر سکتی ہیں، جن کے چک کے تحرلنی مقیاس کی قدر قابل لحاظ ہوتی ہے۔ طولی لہروں کے لیے چک کے حجم مقیاس کی ضرورت ہوتی ہے، اس لیے وہ ہر قسم کے واسطے، ٹھوس رقیق اور گیسوں میں سے گزر سکتی ہیں۔
5. ایک دئے ہوئے تعدد کی ہارمونی رواں لہریں تمام ذرات کی سعت یکساں ہوتی ہے لیکن فیز مختلف ہوتے ہیں (دیے ہوئے وقت پر)۔ ایک مقیم لہریں، دونوں کے درمیان تمام ذرات، ایک دیے ہوئے وقت پر یکساں فیز میں ہوتے ہیں لیکن ان کی سعتیں مختلف ہوتی ہیں۔
6. ایک ایسے مشاہد کی مناسبت سے جو ایک واسطے میں حالت سکون پر ہو، اس واسطے میں ایک میکائی لہری رفتار v ، صرف واسطے کی پچلی اور دوسری خاصیتوں (جیسے کثافت) پر منحصر ہے۔ یہ وسیلے کی رفتار پر منحصر نہیں ہے۔
7. واسطے کی مناسبت سے رفتار v_0 سے حرکت کرتے ہوئے مشاہد کے لیے، ایک لہری رفتار v سے مختلف ہوتی ہے اور دی جاتی ہے: $v \pm v_0$

مشق

- 15.1 ایک 2.50kg کمیت کی ڈوری 200N تناؤ کے زیر اثر ہے۔ تنی ہوئی ڈوری کی لمبائی 20.0m ہے۔ اگر ایک سرے پر عرضی جھٹکا لگایا جائے، تو ڈوری کے دوسرے سرے تک پہنچنے میں خلل کو کتنا وقت لگے گا؟
- 15.2 ایک 300m اونچے مینار پر سے گرایا گیا پتھر، مینار کی بنیاد کے نزدیک تالاب کے پانی میں گرتا ہے۔ پتھر کے پانی میں گرنے کی آواز مینار پر کب سنائی دے گی۔ دیا ہے، ہوا میں آواز کی رفتار 340ms^{-1} ہے۔ $(g = 9.8\text{ms}^{-2})$ ۔
- 15.3 ایک فولاد کے تار کی لمبائی 12.0m اور کمیت 2.10kg ہے۔ تار میں تناؤ کتنا ہونا چاہیے کہ تار پر ایک عرضی لہری رفتار، سوکھی ہوا میں آواز کی رفتار 343ms^{-1} (20°C) پر کے مساوی ہو۔

15.4 فارمولہ $v = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}}$ کے استعمال کے ذریعے وضاحت کیجیے کہ ہوا میں آواز کی رفتار کیوں۔

(a) دباؤ کے تابع نہیں ہے

(b) درجہ حرارت کے ساتھ بڑھتی ہے

(c) مرطوبیت (Humidity) کے ساتھ بڑھتی ہے

- 15.5 آپ سیکھ چکے ہیں کہ ایک رواں لہر، ایک بُعد میں، ایک تفاعل: $y = f(x, t)$ کے ذریعے ظاہر کی جاتی ہے، جہاں x اور t کو (x, t) یا (x, vt) کی شکل میں متحد ہونا لازمی ہے، یعنی کہ، $y = f(x + vt)$ کیا اس کا برعکس بھی صادق ہے؟ جانچیے کہ کیا y کے لیے مندرجہ ذیل تفاعلات کا ایک رواں لہر کو ظاہر کرنا ممکن ہے:

(a) $(x - vt)^2$

(b) $\log [(x + vt)/x_0]$

(c) $\frac{1}{x + vt}$

15.6 ایک چمکاڑ ہوا میں تعدد 1000 kHz کی بالا صوتی آواز خارج کرتی ہے۔ اگر آواز ایک پانی کی سطح سے ٹکراتی ہے تو، کیا طول لہر ہوگی؟ (a) منعکس آواز کی (b) ترسیل ہونے والی آواز کی؟ آواز کی رفتار: ہوا میں 340 ms^{-1} ، پانی میں 1486 ms^{-1}

15.7 ایک اسپتال ایک نسج (Tissue) میں رسولیوں کا مقام پتہ کرنے کے لیے ایک بالا صوتی تقطیع کار (Ultrasonic Scanner) استعمال کرتا ہے۔ اس نسج میں آواز کی طول لہر کیا ہوگی، جس میں آواز کی چال 1.7 Km s^{-1} ہے؟ تقطیع کار کے کام کرنے کا تعدد 4.2 MHz ہے۔

15.8 ایک ڈوری پر ایک ہارمونی عرضی لہر دی جاتی ہے: $y(x, t) = 3.0 \sin(36t + 0.018x + \pi/4)$

جہاں x اور y سینٹی میٹر میں ہیں اور t سیکنڈ میں۔ x کی مثبت سمت، بائیں سے دائیں ہے۔

(a) یہ ایک رواں لہر ہے یا قائم لہر؟ یہ اگر حرکت کر رہی ہے تو اس کی اشاعت کی چال اور سمت کیا ہیں؟

(b) اس کی سعت اور تعدد کی کیا قدریں ہیں؟

(c) مبدے پر آغازی فیز کیا ہے

(d) لہر میں دو متواتر فرازوں کے درمیان کم ترین فاصلہ کیا ہے؟

15.9 مشق 15.8 میں بیان کی گئی لہر کے لیے، نقل (y) بہ مقابلہ t گراف $x = 0.2$ اور $x = 4 \text{ cm}$ کے لیے کھینچے۔ ان گرافوں کی شکلیں کیسی ہیں؟ لہر میں اتھرازی حرکت، ایک نقطہ سے دوسرے تک، کس طور پر مختلف ہے: سعت، تعدد یا فیز کے لحاظ سے۔

15.10 مندرجہ ذیل ہارمونی لہر: $y(x, t) = 2.0 \cos 2\pi(10t - 0.0080x + 0.35)$

کے لیے، جہاں x اور y سینٹی میٹر میں ہیں، اور t سیکنڈ میں، ایسے دو نقطوں پر اتھرازی حرکت میں فیز فرق معلوم کیجیے، جن کے درمیان فاصلہ ہے:-

(a) 4 m

(b) 0.5 m

(c) $\lambda/2$

(d) $3\lambda/4$

15.11 ایک دونوں سروں پر بندھی ہوئی ڈوری کا عرضی نقل دیا جاتا ہے: $y(x, t) = 0.06 \sin\left(\frac{2\pi}{3}x\right) \cos(120\pi t)$

جہاں x اور y سینٹی میٹر میں اور t سیکنڈ میں۔ ڈوری کی لمبائی 1.5 m اور اس کی کمیت $3.0 \times 10^2 \text{ kg}$ ہے۔

مندرجہ ذیل کے جواب دیجیے:

- (a) تفاعل ایک رواں لہر کو ظاہر کرتا ہے یا مقیم لہر؟
 (b) اس لہر کی مخالف سمتوں میں حرکت کرتی ہوئی دو لہروں کے انطباق کے بطور، تشریح کیجیے۔ ہر لہر کی طول لہر، تعدد اور چال کیا ہے؟
 (c) ڈوری میں تناؤ معلوم کیجیے۔

15.12 (i) مشتق 15.11 میں بیان کی گئی ڈوری پر، کیا ڈوری کے تمام نقاط یکساں (a) تعدد (b) فیز (c) سعت سے اہتزاز کرتے

ہیں؟ اپنے جوابات کی وضاحت کیجیے۔ (ii) ایک نقطہ جو ایک سرے 0.375m دور ہے، اس پر سعت کتنی ہے؟

15.13 نیچے ایک پچیلی لہر کے نقل کو ظاہر کرنے کے لیے (عرضی یا طولی نقل)، x اور t کے کچھ تفاعلات دیے گئے ہیں۔

بتائیے کہ ان میں سے کون ظاہر کرتے ہیں (i) ایک رواں لہر (ii) ایک قائم لہر یا (iii) کوئی لہر نہیں۔

- (a) $y = 2 \cos(3x) \sin(10t)$
 (b) $y = 2\sqrt{x - vt}$
 (c) $y = 3 \sin(5x - 0.5t) + 4 \cos(5x - 0.5t)$
 (d) $y = \cos x \sin t + \cos 2x \sin 2t$

15.14 دو استوار سہاروں کے درمیان تنا ہوا ایک تار، 45Hz کے تعدد کے ساتھ، اپنے اساسی موڈ میں اہتزاز کرتا ہے۔ تار کی کمیت

$3.5 \times 10^{-2} \text{kg}$ اور اس کی خطی کمیت کثافت $4.0 \times 10^{-2} \text{kg m}^{-1}$ ہے۔ (a) تار پر عرضی لہر کی چال کیا ہے؟

(a) تار میں تناؤ کتنا ہے۔

15.15 ایک میٹر لمبی ایک ٹیوب کا ایک سر اٹھلا ہے اور دوسرے سرے پر حرکت کر سکنے والا پسٹن لگا ہے۔ جب ٹیوب کی لمبائی

25.5cm یا 79.3cm ہوتی ہے تو یہ ایک معین تعدد والے وسیلے (340Hz کی ٹیونگ فارک) سے گمک ظاہر کرتی ہے۔

تجربہ کے درجہ حرارت پر ہوا میں آواز کی رفتار کا تخمینہ لگائیے۔ کنارہ اثرات (edge effects) نظر انداز کیے جاسکتے ہیں۔

15.16 100cm لمبی فولادی چھڑ، اپنے وسطی نقطہ پر بندھی ہوئی ہے۔ چھڑ کے طولی ارتعاشوں کا بنیادی تعدد 2.53kHz ہے۔

فولاد میں آواز کی رفتار کیا ہے؟

15.17 ایک 20cm لمبا پائپ ایک سرے پر بند ہے۔ ایک 430Hz کے وسیلے سے پائپ کا کون سا ہارمونی موڈ گمک کرے گا؟

کیا یہی وسیلہ پائپ کے ساتھ جب بھی گمک کرے گا اگر پائپ کے دونوں سرے کھلے ہوں؟ (ہوا میں آواز کی رفتار

340ms^{-1} ہے۔

15.18 ستار کے دو تار A اور B ایک دوسرے سے لے میں تھوڑے باہر ہیں (Ga سُر میں) اور 6Hz تعدد کی ضرب پیدا کرتے

ہیں۔ تار A میں تناؤ کو کچھ کم کیا جاتا ہے اور ضرب تعدد کم ہو کر 3Hz ہو جاتا ہے۔ اگر A کا آغازی تعدد 324Hz ہے، تو B

کا تعدد کیا ہے؟

15.19 وضاحت کیجیے کیوں (یا کیسے):

- (a) ایک آواز کی لہر میں، ایک نقل نوڈ ایک دباؤ اینٹی نوڈ ہوتا ہے اور اس کے برخلاف بھی۔
 (b) چمکاؤں میں بغیر آنکھوں کے بھی، فاصلے، سمتیں اور رکاوٹوں کی طبع اور سائز معلوم کر لیتی ہیں۔
 (c) ایک وائکن سر اور ایک ستار سر کا تعدد اگر یکساں ہو تو بھی ہم ان دونوں کے سروں میں فرق کر سکتے ہیں۔
 (d) ٹھوس اشیا، طویل اور عرضی دونوں لہروں کو سہا کر سکتے ہیں، جب کہ گیسوں میں سے صرف طویل لہر گزر سکتی ہیں۔
 (e) ایک انکساری واسطے (Dipressive medium) میں سے گزرتے ہوئے ایک پلس کی شکل خراب ہو جاتی ہے۔
- 15.20 ایک اسٹیشن کے باہر سگنل پرکھڑی ریل گاڑی، 400Hz تعدد کی، ساکت ہوا میں، سیٹی بجاتی ہے۔ (a) ایک پلیٹ فارم پر کھڑے مشاہد کے لیے سیٹی کا تعدد کیا ہوگا جب ٹرین (a) 10 ms^{-1} کی چال سے پلیٹ فارم کی طرف آتی ہے (b) پلیٹ فارم سے 10 ms^{-1} کی رفتار سے دور جاتی ہے۔ (ii) دونوں میں سے ہر صورت میں آواز کی رفتار کیا ہے؟ ساکت ہوا میں آواز کی رفتار 340 ms^{-1} ہے۔

- 15.21 ایک اسٹیشن یارڈ میں کھڑی ٹرین، ساکت ہوا میں 400Hz تعدد کی سیٹی بجاتی ہے۔ یارڈ سے اسٹیشن کی جانب، ہوا 10 ms^{-1} کی چال سے، چلنے لگتی ہے۔ ایک اسٹیشن کے پلیٹ فارم پر کھڑے مشاہد کے لیے آواز کی تعدد، سعت اور چال کی قدریں کیا ہیں۔ کیا یہ صورت بالکل ویسی ہی ہے (متمثل ہے)، جیسے کہ ہوا ساکت ہو، اور مشاہد یارڈ کی جانب 10 ms^{-1} کی چال سے دوڑے؟ ساکت ہوا میں آواز کی رفتار 340 ms^{-1} لی جاسکتی ہے۔

اضافی مشق

- 15.22 ایک ڈوری پر ایک رواں ہارمونی لہر، بیان کی جاتی ہے: $y(x, t) = 7.5 \sin(0.0050x + 12t + \pi/4)$
 (a) $t = 1 \text{ s}$ ، $x = 1 \text{ cm}$ پر ایک نقطہ کے ارتزاز کے نقل اور رفتار کیا ہوں گے؟
 (b) ڈوری کے ان نقاط کے مقام معلوم کیجیے جن کے عرضی نقل اور رفتار کی قدریں وہیں ہوں گی جو $x = 1 \text{ cm}$ نقطہ کی $t = 2 \text{ s}$ ، 11 s پر ہیں۔

- 15.23 ایک تیلی آواز پلس ایک واسطے میں سے بھیجی جاتی ہے (a) کیا اس پلس کی متعین ہے (i) تعدد (ii) طول موج (iii) اشاعت کی چال (b) اگر پلس شرح، ہر 20S پر 1 ہے (یعنی کہ سیٹی ہر 20S بعد، سینکڈ کے ایک ذرا سے حصے کے لیے بجائی جاتی ہے)، تو سیٹی کے ذریعے پیدا کیے گئے سر کا تعدد کیا 1/20 یا 0.5Hz کے مساوی ہوگا۔

- 15.24 ایک خطی کمیت کثافت $8.0 \times 10^{-3} \text{ kgm}$ کی ڈوری کا ایک سر، 256Hz تعدد کی بجلی سے چلنے والی ٹیونک فارک سے منسلک ہے۔ دوسرا سر ایک گراری سے گذرتا ہوا ایک پلڑے سے بندھا ہے، جس میں 90Kg کی کمیت رکھی ہے۔ گراری کا سر آ رہی ساری توانائی جذب کر لیتا ہے، اس طرح کہ اس سرے پر منعکس لہروں کی سعت نظر انداز کی جاسکتی ہے۔

$t=0$ پر، بائیں سرا (فورک کا سرا)، $x=0$ کا عرضی نقل $y=0$ صفر ہے اور وہ مثبت y سمت میں حرکت کر رہا ہے۔ لہر کی سعت 5.0cm ہے۔ ڈوری پر لہر کو بیان کرنے والا عرضی نقل y ، بہ طور تفاعل x اور t ، لکھیے۔

15.25 ایک پن ڈبی میں نصب سونار نظام 40.0KHz کے تعدد پر کام کرتا ہے۔ دشمن کی ایک پن ڈبی، 360kmh^{-1} کی رفتار سے سونار کی طرف آتی ہے۔ پن ڈبی سے منعکس ہوئی آواز کا تعدد کیا ہے؟ پانی میں آواز کی رفتار 1450ms^{-1} لیجیے۔

15.26 زلزلے زمین کے اندر آواز کی لہریں پیدا کرتے ہیں۔ ایک گیس کے برخلاف، زمین عرضی، (s) اور طولی (p) دونوں آواز کی لہریں محسوس کر سکتی ہے۔ s لہر کی رفتار 4.0kms^{-1} اور p لہر کی 8.0kms^{-1} ہے۔ ایک زلزلہ نگار ایک زلزلے کی P اور S لہریں ریکارڈ کرتا ہے۔ پہلی P لہر، پہلی S لہر سے 4.0 منٹ پہلے آتی ہے۔ یہ فرض کرتے ہوئے کہ لہریں خط مستقیم میں حرکت کرتی ہیں، بتائیے کہ زلزلہ کتنے فاصلے پر آیا۔

15.27 ایک چمگاڈ ایک غار میں چکر کاٹ رہی ہے اور بالاصوتی آواز کے ذریعے راستہ تلاش کر رہی ہے۔ یہ فرض کرتے ہوئے کہ چمگاڈ کا آواز خارج کرنے کا تعدد 40KHz ہے۔ ایک سیدھی دیوار کی طرف ایک بار براہ راست اڑاتے ہوئے چمگاڈ ہوا میں آواز کی رفتار کے 0.03 کی رفتار سے اڑتی ہے۔ دیوار سے منعکس ہونے کے بعد چمگاڈ کیا تعدد سنتی ہے؟